6 Aplicações de Integração

A Grande Pirâmide do Faraó Quéops foi construída no Egito de 2580 a.C. a 2560 a.C. e foi a estrutura mais alta feita pelo homem no mundo por mais de 3800 anos. As técnicas deste capítulo nos permitirão estimar o trabalho total feito na construção desta pirâmide e, portanto, fazer uma suposição de quantos trabalhadores foram necessários para construí-la.

Pichugin Dmitry/Shutterstock

Neste capítulo exploraremos algumas das aplicações da integral definida, utilizando-a para calcular áreas entre curvas, volumes de sólidos e o trabalho realizado por uma força variável. O tema comum é o método geral a seguir, que é semelhante ao que foi utilizado para determinar áreas sob curvas. Dividimos primeiro uma quantidade Q em um grande número de pequenas partes. Em seguida, aproximamos cada pequena parte por uma quantidade do tipo $f(x_i^*)\,\Delta x$ e, portanto, aproximamos Q por uma soma de Riemann. Então, tomamos o limite e expressamos Q como uma integral. Finalmente calculamos a integral utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo ou a Regra do Ponto Médio.

6.1 Áreas entre as Curvas

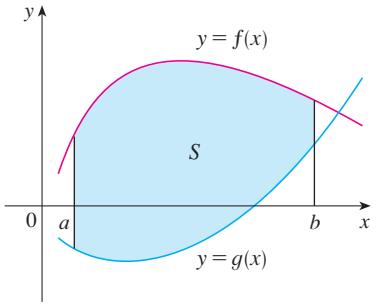


FIGURA 1
$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$

No Capítulo 5 definimos e calculamos áreas de regiões sob gráficos de funções. Aqui, usaremos as integrais para encontrar áreas de regiões entre gráficos de duas funções.

Considere a região S que se encontra entre duas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas e $f(x) \geqslant g(x)$ para todo x em $[a, b]$. (Veja a Figura 1.)

Assim como fizemos para as áreas sob as curvas na Seção 5.1, dividimos S em n faixas de larguras iguais e então aproximamos a i-ésima faixa por um retângulo com base Δx e altura $f(x_i^*) - g(x_i^*)$. (Veja a Figura 2. Se quiséssemos, poderíamos tomar todos os pontos de amostrais como as extremidades direitas, de modo que $x_i^* = x_i$.) A soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\,\Delta x$$

é, portanto, uma aproximação do que intuitivamente pensamos como a área de S.

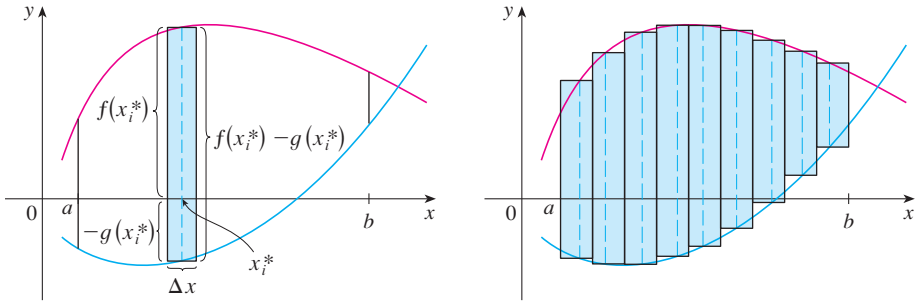


FIGURA 2
(a) Retângulo típico (b) Retângulos aproximantes

Esta aproximação parece tornar-se cada vez melhor quando $n \to \infty$. Portanto, definimos a **área** A da região S como o valor-limite da soma das áreas desses retângulos aproximantes.

$$\boxed{1} \qquad A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\,\Delta x$$

Reconhecemos o limite em 1 assim como a integral definida de $f - g$. Portanto, temos a seguinte fórmula para a área.

2 A área A da região limitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$, $x = b$, onde f e g são contínuas e $f(x) \geqslant g(x)$ para todo x em $[a, b]$, é

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

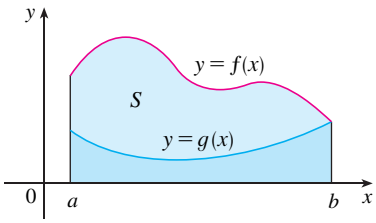


FIGURA 3
$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Observe que, no caso especial onde $g(x) = 0$, S é a região sob o gráfico de f e a nossa definição geral de área 1 se reduz à nossa definição anterior (Definição 2 na Seção 5.1).

No caso em que f e g forem ambas positivas, você pode ver na Figura 3 por que 2 é verdadeira:

$$\begin{aligned} A &= [\text{área sob } y = f(x)] - [\text{área sob } y = g(x)] \\ &= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \end{aligned}$$

EXEMPLO 1 Encontre a área da região limitada acima por $y = e^x$, limitada abaixo por $y = x$, e limitada nos lados por $x = 0$ e $x = 1$.

SOLUÇÃO A região é mostrada na Figura 4. A curva limitante superior é $y = e^x$ e a curva limitante inferior é $y = x$. Então, usamos a fórmula da área 2 com $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $a = 0$ e $b = 1$:

$$A = \int_0^1 (e^x - x)\,dx = e^x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^1$$

$$= e - \tfrac{1}{2} - 1 = e - 1{,}5$$

Na Figura 4 desenhamos um retângulo aproximante típico com largura Δx que nos lembra o procedimento pelo qual a área é definida em 1. Em geral, quando determinamos uma integral para uma área, é útil esboçar a região para identificar a curva superior y_T, a curva inferior y_B e um retângulo aproximante típico, como na Figura 5. Então, a área de um retângulo típico é $(y_T - y_B)\,\Delta x$ e a equação

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (y_T - y_B)\,\Delta x = \int_a^b (y_T - y_B)\,dx$$

resumem o procedimento de adição (no sentido de limite) das áreas de todos os retângulos típicos.

Observe que na Figura 5 o limite esquerdo se reduz a um ponto, enquanto na Figura 3 o limite direito é que se reduz a um ponto. No próximo exemplo, ambos os limites laterais se reduzem a um ponto, de modo que a primeira etapa é encontrar a e b.

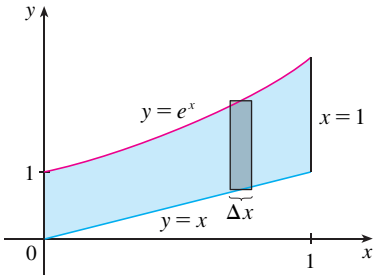


FIGURA 4

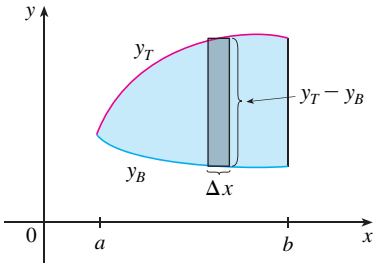


FIGURA 5

EXEMPLO 2 Encontre a área da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2x - x^2$.

SOLUÇÃO Primeiro encontramos os pontos de intersecção das parábolas, resolvendo suas equações simultaneamente. Isso resulta em $x^2 = 2x - x^2$ ou $2x^2 - 2x = 0$. Portanto, $2x\,(x - 1) = 0$, então $x = 0$ ou 1. Os pontos de intersecção são (0, 0) e (1, 1).

Vemos na Figura 6 que os limites superior e inferior são

$$y_T = 2x - x^2 \qquad \text{e} \qquad y_B = x^2$$

A área de um retângulo típico é

$$(y_T - y_B)\,\Delta x = (2x - x^2 - x^2)\,\Delta x$$

e encontra-se entre a região $x = 0$ e $x = 1$. Então, a área total é

$$A = \int_0^1 (2x - 2x^2)\,dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

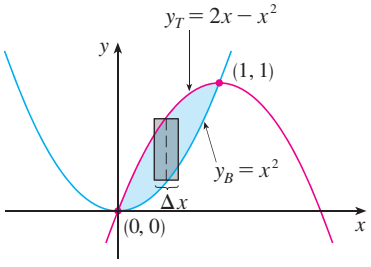


FIGURA 6

Às vezes é difícil, ou mesmo impossível, encontrar os pontos exatos de intersecção de duas curvas. Como mostramos no exemplo a seguir, podemos usar uma calculadora gráfica ou um computador para encontrar valores aproximados para os pontos de intersecção e então prosseguir como anteriormente.

EXEMPLO 3 Encontre a área aproximada da região limitada pelas curvas $y = x/\sqrt{x^2 + 1}$ e $y = x^4 - x$.

SOLUÇÃO Se fôssemos tentar encontrar os pontos de intersecção exatos, teríamos de resolver a equação

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = x^4 - x$$

Essa parece ser uma equação muito difícil de resolver exatamente (de fato, é impossível), então usamos uma calculadora gráfica para desenhar os gráficos das duas curvas na Figura 7. Um ponto de intersecção é a origem. Dando um *zoom* em direção ao outro ponto de intersecção, descobrimos que $x \approx 1{,}18$. (Se é necessária uma maior precisão, podemos usar o método de Newton ou um método para determinação de raízes, se disponível em nossa calculadora gráfica.) Assim, uma aproximação para a área entre as curvas é

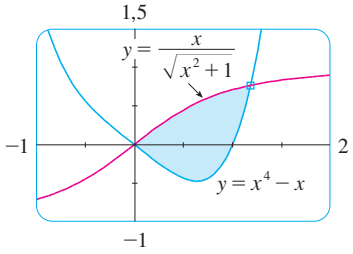


FIGURA 7

$$A \approx \int_0^{1,18} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - (x^4 - x) \right] dx$$

Para integrar o primeiro termo, usamos a substituição $u = x^2 + 1$. Então, $du = 2x\,dx$, e quando $x = 1{,}18$, temos $u \approx 2{,}39$. Logo

$$\begin{aligned} A &\approx \tfrac{1}{2} \int_1^{2,39} \frac{du}{\sqrt{u}} - \int_0^{1,18} (x^4 - x)\,dx \\ &= \sqrt{u}\,\Big]_1^{2,39} - \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{1,18} \\ &= \sqrt{2{,}39} - 1 - \frac{(1{,}18)^5}{5} + \frac{(1{,}18)^2}{2} \\ &\approx 0{,}785 \end{aligned}$$

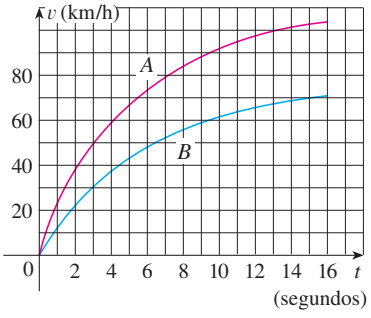


FIGURA 8

EXEMPLO 4 A Figura 8 mostra curvas de velocidade para dois carros, A e B, que partem lado a lado e se movem ao longo da mesma estrada. O que a área entre as curvas representa? Use a Regra do Ponto Médio para estimá-la.

SOLUÇÃO Nós sabemos através da Seção 5.4 que a área sob a curva de velocidade A representa a distância percorrida pelo carro A durante os primeiros 16 segundos. Da mesma forma, a área sob a curva B é a distância percorrida pelo carro B durante esse período de tempo. Assim, a área entre essas curvas, que é a diferença entre as áreas sob as curvas, é a distância entre os carros após 16 segundos. Obtemos as velocidades a partir do gráfico e as convertemos em metros por segundo (1 km/h = $\frac{1\,000}{3\,600}$ m/s).

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16
v_A	0	10,4	16,5	20,4	23,2	25,6	27,1	28,0	29,0
v_B	0	6,4	10,4	13,4	15,5	17,1	18,3	19,2	19,8
$v_A - v_B$	0	4,0	6,1	7,0	7,7	8,5	8,8	8,8	9,2

Aplicamos a Regra do Ponto Médio com $n = 4$ intervalos, de modo que $\Delta t = 4$. Os pontos médios dos intervalos são $\bar{t}_1 = 2$, $\bar{t}_2 = 6$, $\bar{t}_3 = 10$ e $\bar{t}_4 = 14$. Estimamos a distância entre os carros após 16 segundos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_0^{16} (v_A - v_B)\,dt &\approx \Delta t\,[4{,}0 + 7{,}0 + 8{,}5 + 8{,}8] \\ &= 4(28{,}3) = 113{,}2 \text{ m} \end{aligned}$$

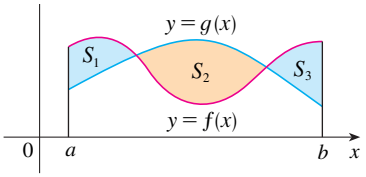


FIGURA 9

Para encontrarmos a área entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ onde $f(x) \geqslant g(x)$ para alguns valores de x, mas $g(x) \geqslant f(x)$ para outros valores de x, então dividimos determinada região S em várias regiões S_1, S_2, . . . com áreas A_1, A_2, . . . como mostrado na Figura 9. Em seguida, definimos a área da região S como a soma das áreas das regiões menores S_1, S_2, . . . , ou seja, $A = A_1 + A_2 + \cdots$. Uma vez que

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{onde } f(x) \geqslant g(x) \\ g(x) - f(x) & \text{onde } g(x) \geqslant f(x) \end{cases}$$

temos a seguinte expressão para A.

3 A área entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e entre $x = a$ e $x = b$ é

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

Quando calculamos a integral em 3, no entanto, ainda temos que dividi-la em integrais correspondentes a $A_1, A_2, \ldots$.

EXEMPLO 5 Encontre a área da região delimitada pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$ e $x = \pi/2$.

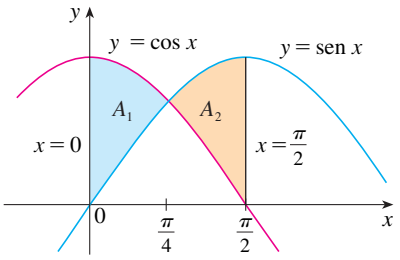


FIGURA 10

SOLUÇÃO Os pontos de intersecção ocorrem quando $\operatorname{sen} x = \cos x$, isto é, quando $x = \pi/4$ (considerando que $0 \leq x \leq \pi/2$). A região é esboçada na Figura 10. Observe que $\cos x \geq \operatorname{sen} x$ quando $0 \leq x \leq \pi/4$, mas $\operatorname{sen} x \geq \cos x$ quando $\pi/4 \leq x \leq \pi/2$. Portanto, a área requerida é

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/2} |\cos x - \operatorname{sen} x|\, dx = A_1 + A_2 \\ &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx \\ &= \left[\operatorname{sen} x + \cos x\right]_0^{\pi/4} + \left[-\cos x - \operatorname{sen} x\right]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1\right) + \left(-0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

Neste exemplo particular, poderíamos ter economizado algum trabalho por perceber que a região é simétrica em torno de $x = \pi/4$ e, assim,

$$A = 2A_1 = 2\int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx$$

Algumas regiões são mais bem tratadas considerando x como uma função de y. Se uma região é delimitada por curvas com equações $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ e $y = d$, em que f e g são contínuas e $f(y) \geq g(y)$ para $c \leq y \leq d$ (veja a Figura 11), então sua área é

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$

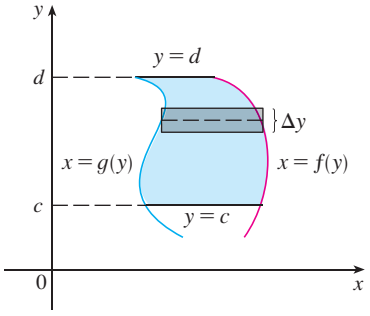


FIGURA 11

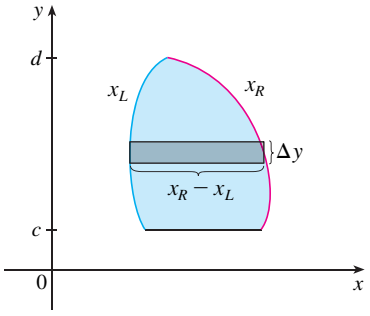


FIGURA 12

Se escrevermos x_R para o limite à direita e x_L para o limite à esquerda, então, como ilustra a Figura 12, teremos

$$A = \int_c^d (x_R - x_L)\, dy$$

Aqui um retângulo de aproximante típico tem dimensões $x_R - x_L$ e Δy.

EXEMPLO 6 Encontre a área delimitada pela reta $y = x - 1$ e pela parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUÇÃO Ao resolvermos as duas equações, vemos que os pontos de intersecção são $(-1, -2)$ e $(5, 4)$. Isolamos x na equação da parábola e observamos pela Figura 13 que as curvas de fronteira à esquerda e à direita são

$$x_L = \tfrac{1}{2}y^2 - 3 \quad \text{e} \quad x_R = y + 1$$

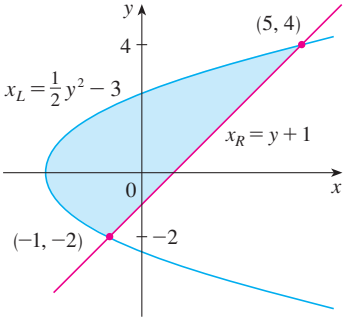


FIGURA 13

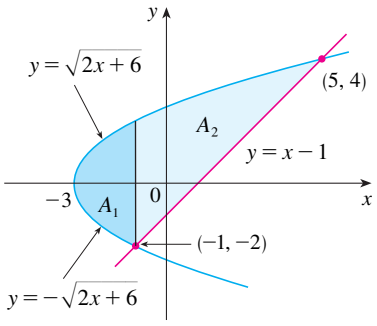


FIGURA 14

Devemos integrar entre os valores apropriados de $y = -2$ e $y = 4$. Logo,

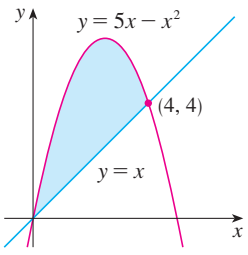
$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{4} (x_R - x_L)\, dy \\ &= \int_{-2}^{4} \left[(y + 1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy \\ &= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y \Bigg]_{-2}^{4} \\ &= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\tfrac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18 \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO Poderíamos ter encontrado a área no Exemplo 6, integrando em relação a x em vez de y, mas o cálculo é muito mais complicado. Isso significaria dividir a região em duas e calcular as áreas marcadas A_1 e A_2 na Figura 14. O método que usamos no Exemplo 6 é *muito* mais fácil.

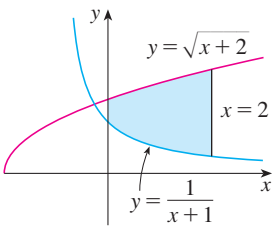
6.1 Exercícios

1–4 Encontre a área da região sombreada.

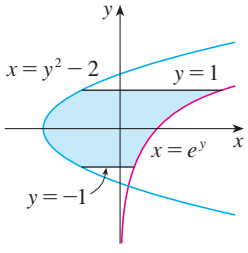
1.



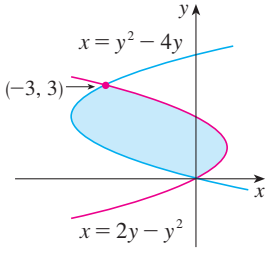
2.



3.



4.



5–12 Esboce a região delimitada pelas curvas indicadas. Decida quando integrar em relação a x ou y. Desenhe um retângulo aproximante típico e identifique sua altura e largura. Então, calcule a área da região.

5. $y = e^x$, $y = x^2 - 1$, $x = -1$, $x = 1$
6. $y = \operatorname{sen} x$, $y = x$, $x = \pi/2$, $x = \pi$
7. $y = x$, $y = x^2$
8. $y = x^2 - 2x$, $y = x + 4$
9. $y = 1/x$, $y = 1/x^2$, $x = 2$
10. $y = \operatorname{sen} x$, $y = 2x/\pi$, $x \geqslant 0$
11. $x = 1 - y^2$, $x = y^2 - 1$
12. $4x + y^2 = 12$, $x = y$

13–28 Esboce a região delimitada pelas curvas indicadas e encontre sua área.

13. $y = 12 - x^2$, $y = x^2 - 6$
14. $y = x^2$, $y = 4x - x^2$
15. $y = e^x$, $y = xe^x$, $x = 0$
16. $y = \cos x$, $y = 2 - \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$
17. $x = 2y^2$, $x = 4 + y^2$
18. $y = \sqrt{x - 1}$, $x - y = 1$
19. $y = \cos \pi x$, $y = 4x^2 - 1$
20. $x = y^4$, $y = \sqrt{2 - x}$, $y = 0$
21. $y = \operatorname{tg} x$, $y = 2 \operatorname{sen} x$, $-\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/3$
22. $y = x^3$, $x = y$
23. $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} 2x$, $x = 0$, $x = \pi/2$
24. $y = \cos x$, $y = 1 - \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$
25. $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{2}x$, $x = 9$
26. $y = |x|$, $y = x^2 - 2$
27. $y = 1/x$, $y = x$, $y = \frac{1}{4}x$, $x > 0$
28. $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 2x^2$, $x + y = 3$, $x \geqslant 0$

29–30 Use o cálculo para encontrar a área do triângulo com os vértices dados.

29. (0, 0), (3, 1), (1, 2)
30. (0, 5), (2, −2), (5, 1)

31–32 Calcule a integral e interprete-a como a área de uma região. Esboce a região.

31. $\int_0^{\pi/2} |\operatorname{sen} x - \cos 2x|\, dx$ **32.** $\int_0^4 |\sqrt{x + 2} - x|\, dx$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

33–36 Use um gráfico para encontrar os valores aproximados das coordenadas x dos pontos de intersecção das curvas indicadas. A seguir, encontre a área aproximada da região delimitada pelas curvas.

33. $y = x \operatorname{sen}(x^2), \quad y = x^4$

34. $y = \dfrac{x}{(x^2 + 1)^2}, \quad y = x^5 - x, \quad x \geqslant 0$

35. $y = 3x^2 - 2x, \quad y = x^3 - 3x + 4$

36. $y = e^x, \quad y = 2 - x^2$

37–40 Represente graficamente a região entre as curvas e use a calculadora para encontrar a área correta até a quinta casa decimal.

37. $y = \dfrac{2}{1 + x^4}, \quad y = x^2$

38. $y = e^{1-x^2}, \quad y = x^4$

39. $y = \operatorname{tg}^2 x, \quad y = \sqrt{x}$

40. $y = \cos x, \quad y = x + 2 \operatorname{sen}^4 x$

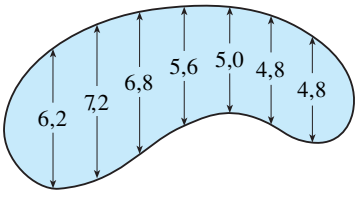
SCA **41.** Use um sistema de computação algébrica para encontrar a área exata da região delimitada pelas curvas $y = x^5 - 6x^3 + 4x$ e $y = x$.

42. Esboce a região no plano xy definida pelas inequações $x - 2y^2 \geqslant 0$, $1 - x - |y| \geqslant 0$ e encontre sua área.

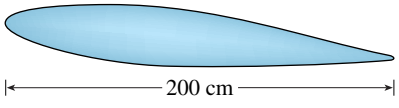
43. Os carros de corrida dirigidos por Chris e Kelly estão lado a lado na largada de uma corrida. A tabela mostra as velocidades de cada carro (em quilômetros por hora) durante os primeiros dez segundos da corrida. Use a Regra do Ponto Médio para estimar quão mais longe Kelly vai do que Chris durante os primeiros 10 segundos.

t	v_C	v_K	t	v_C	v_K
0	0	0	6	110	128
1	32	35	7	120	138
2	51	59	8	130	150
3	74	83	9	138	157
4	86	98	10	144	163
5	99	114			

44. As larguras (em metros) de uma piscina com o formato de rim foram medidas a intervalos de 2 metros, como indicado na figura. Use a Regra do Ponto Médio para estimar a área da piscina.

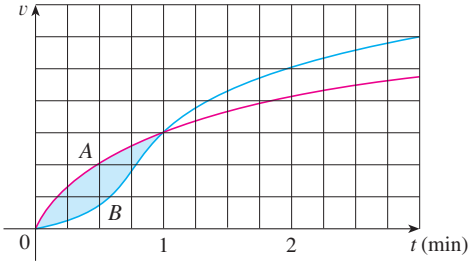


45. É mostrada a seção transversal da asa de um avião. As medidas em centímetros da espessura da asa, em intervalos de 20 centímetros, são 5,8, 20,3, 26,7, 29,0, 27,6, 27,3, 23,8, 20,5, 15,1, 8,7, e 2,8. Utilize a Regra do Ponto Médio para estimar a área da secção transversal da asa.

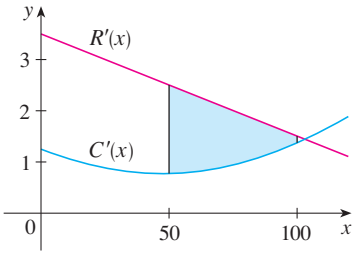


46. Se a taxa de natalidade da população é $b(t) = 2\,200e^{0,024t}$ pessoas por ano e a taxa de mortalidade é $d(t) = 1\,460e^{0,018t}$ pessoas por ano, encontre a área entre estas curvas para $0 \leqslant t \leqslant 10$. O que esta área representa?

47. Dois carros, A e B, largam lado a lado e aceleram a partir do repouso. A figura mostra os gráficos de suas funções velocidade.
(a) Qual carro estará na frente após 1 minuto? Explique.
(b) Qual o significado da área da região sombreada?
(c) Qual carro estará na frente após 2 minutos? Explique.
(d) Estime quando os carros estarão novamente lado a lado.



48. A figura mostra os gráficos da função receita marginal R' e da função custo marginal C' para um fabricante. [Lembre-se, da Seção 4.7, de que $R(x)$ e $C(x)$ representam as receitas e custos quando x unidades são manufaturadas. Suponha que R e C sejam medidas em milhares de dólares.] Qual é o significado da área da região sombreada? Use a Regra do Ponto Médio para estimar o valor dessa quantidade.



49. A curva com equação $y^2 = x^2(x + 3)$ é chamada **cúbica de Tschirnhausen**. Se você colocar essa curva em um gráfico, verá que parte dela forma um laço. Encontre a área dentro desse laço.

50. Encontre a área da região delimitada pela parábola $y = x^2$, pela reta tangente a esta parábola em (1, 1) e pelo eixo x.

51. Encontre o número b tal que a reta $y = b$ divida a região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$ em duas regiões com área igual.

52. (a) Encontre o número a tal que a reta $x = a$ bissecte a área sob a curva $y = 1/x^2$, $1 \leqslant x \leqslant 4$.
(b) Encontre o número b tal que a reta $y = b$ bissecte a área da parte (a).

53. Encontre os valores de c tais que a área da região delimitada pelas parábolas $y = x^2 - c^2$ e $y = c^2 - x^2$ seja 576.

54. Suponha que $0 < c < \pi/2$. Para qual valor de c a área da região delimitada pelas curvas $y = \cos x$, $y = \cos(x - c)$ e $x = 0$ é igual à área da região delimitada pelas curvas $y = \cos(x - c)$, $x = \pi$ e $y = 0$?

55. Para quais valores de m a reta $y = mx$ e a curva $y = x/(x^2 + 1)$ delimitam uma região? Encontre a área da região.

PROJETO APLICADO — O ÍNDICE DE GINI

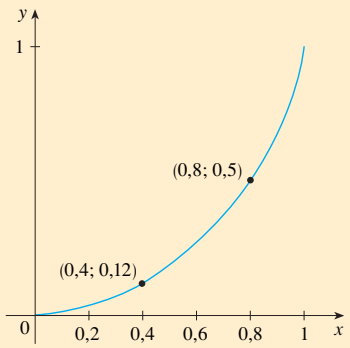


FIGURA 1
Curva de Lorenz para os EUA em 2008

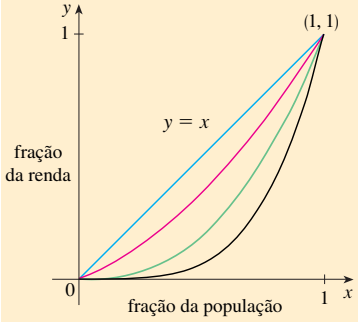


FIGURA 2

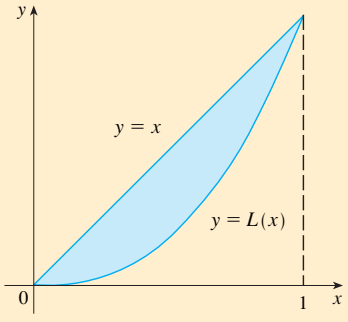


FIGURA 3

Como é possível medir a distribuição de renda entre os habitantes de um determinado país? Uma dessas medidas é o *índice de Gini*, que leva o nome do economista italiano Corrado Gini, o qual foi o primeiro a idealizá-lo em 1912.

Nós primeiro classificamos todas as famílias em um país através da renda e, então, calculamos a porcentagem de famílias cuja renda é de no máximo um percentual determinado da renda total do país. Definimos a **curva de Lorenz** $y = L(x)$ no intervalo [0,1] traçando o ponto $(a/100, b/100)$ sobre a curva se $a\%$ das famílias mais pobres recebe no máximo $b\%$ da renda total. Por exemplo, na Figura 1, o ponto de (0,4; 0,12) está na curva de Lorenz para os Estados Unidos em 2008, pois os 40% mais pobres da população recebiam apenas 12% do total da renda. Da mesma forma, os 80% mais pobres da população receberam 50% do total da renda, então o ponto (0,8; 0,5) está na curva de Lorenz. (A curva de Lorenz é assim denominada em homenagem ao economista norte-americano Max Lorenz.)

A Figura 2 mostra algumas curvas típicas de Lorenz. Todas elas passam pelos pontos (0,0) e (1,1) e são côncavas para cima. No caso extremo $L(x) = x$, a sociedade é perfeitamente igualitária: os $a\%$ mais pobres da população recebem $a\%$ do total da renda e assim todos recebem o mesmo rendimento. A área entre a curva de Lorenz $y = L(x)$ e a reta $y = x$ mede o quanto a distribuição de renda difere da igualdade absoluta. O **índice de Gini** (algumas vezes chamado de **coeficiente Gini** ou de **coeficiente de desigualdade**) é a área entre a curva de Lorenz e a reta $y = x$ (sombreada na Figura 3) dividida pela área abaixo de $y = x$.

1. (a) Mostre que o índice de Gini G é o dobro da área entre a curva de Lorenz e a reta $y = x$, ou seja,

$$G = 2\int_0^1 [x - L(x)]dx$$

(b) Qual é o valor de G para uma sociedade perfeitamente igualitária (todos têm a mesma renda)? Qual é o valor de G para uma sociedade perfeitamente totalitária (uma única pessoa recebe todos os rendimentos)?

2. A tabela a seguir (derivada de dados fornecidos pelo Censo dos EUA) mostra valores da função de Lorenz para a distribuição de renda nos Estados Unidos para o ano de 2008.

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$L(x)$	0,000	0,034	0,120	0,267	0,500	1,000

(a) Qual porcentagem da renda total dos EUA foi recebida pelos 20% mais ricos da população em 2008?

(b) Use uma calculadora ou um computador para ajustar uma função quadrática para os dados na tabela. Represente no plano xy os pontos dos dados e o gráfico da função quadrática. O modelo quadrático se ajusta razoavelmente aos dados?

(c) Use o modelo quadrático para a função de Lorenz para estimar o índice de Gini nos Estados Unidos em 2008.

3. A tabela a seguir indica os valores da função de Lorenz nos anos 1970, 1980, 1990 e 2000. Use o método do Problema 2 para estimar o coeficiente de Gini nos Estados Unidos nesses anos e compare com a sua resposta no Problema 2 (c). Você percebe uma tendência?

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1970	0,000	0,041	0,149	0,323	0,568	1,000
1980	0,000	0,042	0,144	0,312	0,559	1,000
1990	0,000	0,038	0,134	0,293	0,530	1,000
2000	0,000	0,036	0,125	0,273	0,503	1,000

SCA **4.** Um modelo potência, muitas vezes oferece um ajuste mais preciso que um modelo quadrático para uma função de Lorenz. Se você tem um computador com Maple ou Mathematica, ajuste uma função potência ($y = ax^k$) com os dados do Problema 2 e a utilize para estimar o coeficiente de Gini para os Estados Unidos em 2008. Compare com a sua resposta para as partes (b) e (c) do Problema 2.

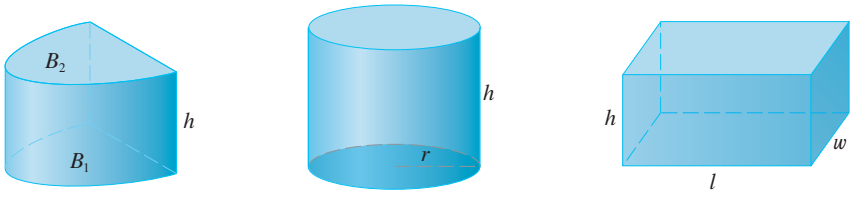
6.2 Volumes

Na tentativa de encontrar o volume de um sólido, nos deparamos com o mesmo tipo de problema que para calcular áreas. Temos uma ideia intuitiva do significado de volume, mas devemos torná-la precisa usando o cálculo para chegar à definição exata de volume.

Começamos com um tipo simples de sólido chamado **cilindro** (ou, mais precisamente, um *cilindro reto*). Como ilustrado na Figura 1(a), um cilindro é delimitado por uma região plana B_1, denominada **base**, e uma região congruente B_2 em um plano paralelo. O cilindro consiste em todos os pontos nos segmentos de reta perpendiculares à base que unem B_1 a B_2. Se a área da base é A e a altura do cilindro (distância de B_1 para B_2) é h, então, o volume V do cilindro é definido como

$$V = Ah$$

Em particular, se a base é um círculo com raio r, então o cilindro é um cilindro circular com o volume $V = \pi r^2 h$ [veja a Figura 1(b)], e se a base é um retângulo com comprimento l e largura w, então o cilindro é uma caixa retangular (também chamado *paralelepípedo retangular*) com o volume $V = lwh$ [veja a Figura 1(c)].



(a) Cilindro $V = Ah$ (b) Cilindro circular $V = \pi r^2 h$ (c) Caixa retangular $V = lwh$

FIGURA 1

Para um sólido S que não é um cilindro, nós primeiro "cortamos" S em pedaços e aproximamos cada parte por um cilindro. Estimamos o volume de S adicionando os volumes dos cilindros. Chegamos ao volume exato de S através de um processo de limite em que o número de partes torna-se grande.

Começamos interceptando S com um plano e obtendo uma região plana que é chamada **secção transversal** de S. Seja $A(x)$ a área da secção transversal de S no plano P_x perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto x, onde $a \leqslant x \leqslant b$. (Veja a Figura 2. Pense em fatiar S com uma faca passando por x e calcule a área da fatia.) A área da secção transversal $A(x)$ irá variar quando x aumenta de a para b.

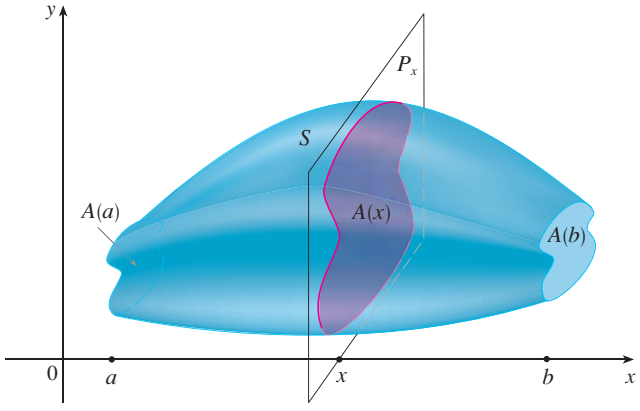


FIGURA 2

Vamos dividir S em n "fatias" de larguras iguais a Δx usando os planos $P_{x_1}, P_{x_2}, \ldots$ para fatiar o sólido. (Pense em fatiar um pedaço de pão.) Se escolhermos pontos amostrais x_i^* em $[x_{i-1}, x_i]$, poderemos aproximar a i-ésima fatia S_i (a parte de S que está entre os planos $P_{x_{i-1}}$ e P_{x_i}) a um cilindro com área da base $A(x_i^*)$ e "altura" Δx. (Veja a Figura 3.)

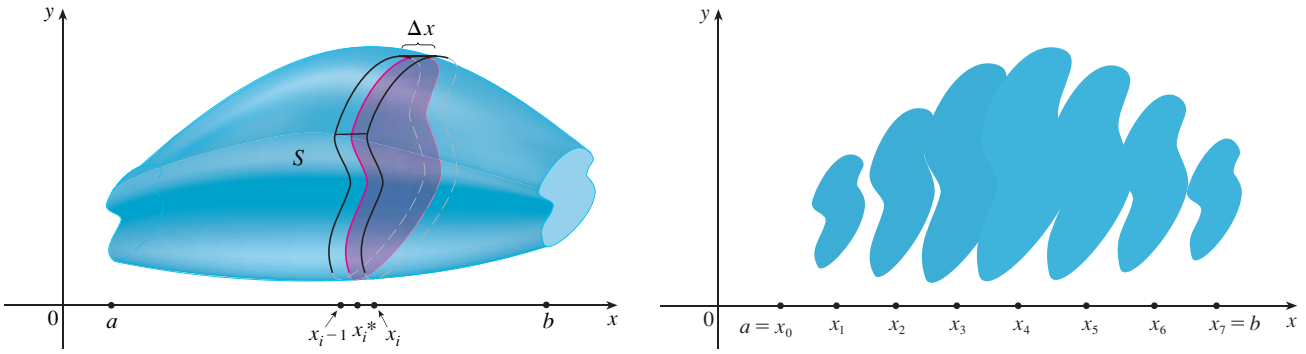


FIGURA 3

O volume desse cilindro é $A(x_i^*)\,\Delta x$, assim, uma aproximação para a nossa concepção intuitiva do volume da i-ésima fatia S_i é

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\,\Delta x$$

Adicionando os volumes dessas fatias, obtemos uma aproximação para o volume total (isto é, o que pensamos intuitivamente como volume):

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x$$

Esta aproximação parece melhorar quando $n \to \infty$. (Pense nas fatias tornando-se cada vez mais finas.) Portanto, *definimos* o volume como o limite dessas somas quando $n \to \infty$. Mas reconhecemos o limite da soma de Riemann como uma integral definida, e dessa forma temos a seguinte definição.

Pode-se provar que esta definição é independente de como S está situado em relação ao eixo x. Em outras palavras, não importa como fatiamos S com planos paralelos; sempre teremos o mesmo resultado para V.

Definição de volume Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_x, passando por x e perpendicular ao eixo x, é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o **volume** de S é

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b A(x)\,dx$$

Quando usamos a fórmula de volume $V = \int_a^b A(x)\,dx$, é importante lembrar que $A(x)$ é a área de uma secção transversal móvel, obtida fatiando em x perpendicularmente ao eixo x.

Observe que, para um cilindro, a área da secção transversal é constante: $A(x) = A$ para todo x. Então, nossa definição de volume resulta em $V = \int_a^b A\,dx = A(b - a)$; isso coincide com a fórmula $V = Ah$.

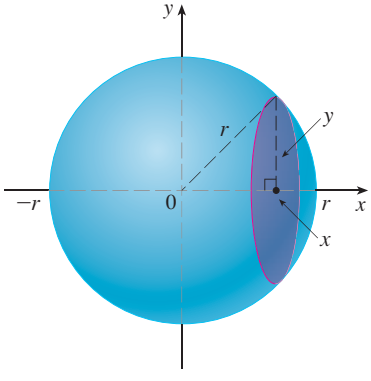


FIGURA 4

EXEMPLO 1 Mostre que o volume de uma esfera de raio r é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

SOLUÇÃO Se colocarmos a esfera de modo que o seu centro se encontre na origem (veja a Figura 4), então o plano P_x intercepta a esfera em um círculo cujo raio (Teorema de Pitágoras) é $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Portanto, a área da secção transversal é

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

Usando a definição de volume com $a = -r$ e $b = r$, temos

$$V = \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx \qquad \text{(O integrando é par.)}$$

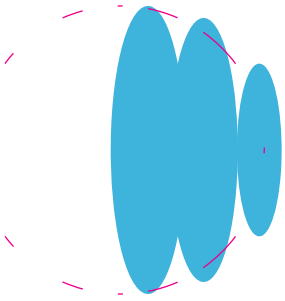
$$= 2\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right)$$
$$= \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

A Figura 5 ilustra a definição de volume quando o sólido é uma esfera com raio $r = 1$. Pelo resultado do Exemplo 1, sabemos que o volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi$, que é aproximadamente 4,18879. Aqui as fatias são cilindros circulares, ou *discos*, e as três partes da Figura 5 mostram as interpretações geométricas das somas de Riemann

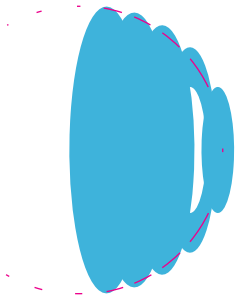
$$\sum_{i=1}^{n} A(\bar{x}_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \pi(1^2 - \bar{x}_i^2)\,\Delta x$$

TEC O *Visual 6.2A* mostra uma animação da Figura 5.

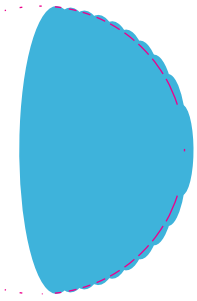
quando $n = 5$, 10 e 20 se escolhermos os pontos amostrais x_i^* como os pontos médios $\bar{x}_i$. Observe que à medida que aumentamos o número de cilindros aproximantes, a soma de Riemann correspondente se torna mais próxima do volume verdadeiro.



(a) Usando 5 discos, $V \approx 4{,}2726$



(b) Usando 10 discos, $V \approx 4{,}2097$



(c) Usando 20 discos, $V \approx 4{,}1940$

FIGURA 5 Aproximando o volume de uma esfera com raio 1

EXEMPLO 2 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ de 0 a 1. Ilustre a definição de volume esboçando um cilindro aproximante típico.

SOLUÇÃO A região é mostrada na Figura 6(a). Se fizermos a rotação em torno do eixo x, obteremos o sólido mostrado na Figura 6(b). Quando fatiamos pelo ponto x, obtemos um disco com raio $\sqrt{x}$. A área dessa secção transversal é

$$A(x) = \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 = \pi x$$

e o volume do cilindro aproximante (um disco com espessura Δx) é

$$A(x)\,\Delta x = \pi x\,\Delta x$$

O sólido encontra-se entre $x = 0$ e $x = 1$, assim o seu volume é

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi x\,dx = \pi\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Obtivemos uma resposta razoável no Exemplo 2? Para verificar o nosso trabalho, vamos substituir a região dada por um quadrado com base $[0, 1]$ e altura 1. Se fizermos a rotação desse quadrado, obteremos um cilindro com raio 1, altura 1 e volume $\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$. Calculamos que o sólido dado tem metade desse volume. Isso parece estar certo.

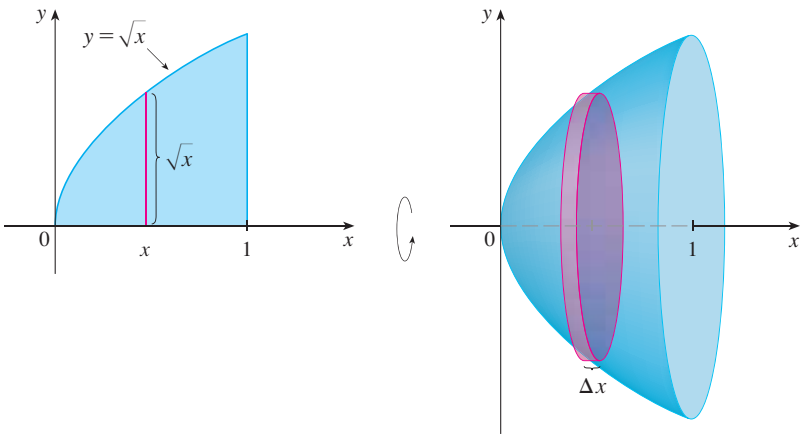


FIGURA 6 (a) (b)

EXEMPLO 3 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada por $y = x^3$, $y = 8$, e $x = 0$ em torno do eixo y.

SOLUÇÃO A região é mostrada na Figura 7(a) e o sólido resultante é mostrado na Figura 7(b). Como a região é girada em torno do eixo y, faz sentido fatiar o sólido perpendicularmente ao eixo y e, portanto, integrar em relação a y. Se fatiarmos a uma altura y, obteremos um disco circular com raio x, onde $x = \sqrt[3]{y}$. Então, a área da secção transversal em y é

$$A(y) = \pi x^2 = \pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 = \pi y^{2/3}$$

e o volume do cilindro aproximante mostrado na Figura 7(b) será

$$A(y)\,\Delta y = \pi y^{2/3}\,\Delta y$$

Como o sólido encontra-se entre $y = 0$ e $y = 8$, seu volume é

$$V = \int_0^8 A(y)\,dy = \int_0^8 \pi y^{2/3}\,dy = \pi\left[\tfrac{3}{5}y^{5/3}\right]_0^8 = \frac{96\pi}{5}$$

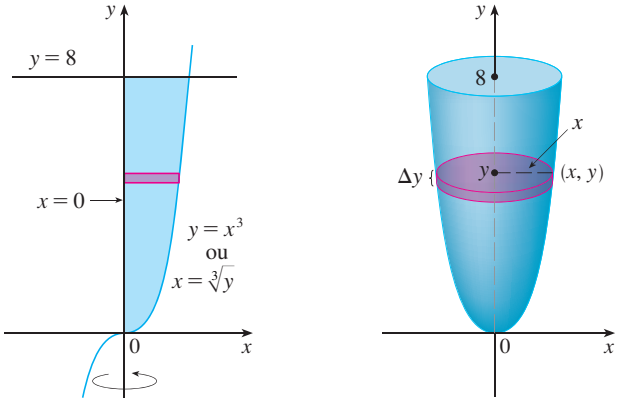


FIGURA 7 (a) (b)

TEC *Visual 6.2B* mostra como sólidos de revolução são formados.

EXEMPLO 4 A região $\mathcal{R}$, delimitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$, é girada ao redor do eixo x. Encontre o volume do sólido resultante.

SOLUÇÃO As curvas $y = x$ e $y = x^2$ se interceptam nos pontos (0,0) e (1,1). A região entre esses pontos, o sólido de rotação e a secção transversal perpendicular ao eixo x são mostrados na Figura 8. A secção transversal no plano P_x tem o formato de uma *arruela* (um anel) com raio interno x^2 e raio externo x, de modo que calculamos a área da secção transversal subtraindo a área do círculo interno da área do círculo externo:

$$A(x) = \pi x^2 - \pi(x^2)^2 = \pi(x^2 - x^4)$$

Portanto, temos

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\,dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}$$

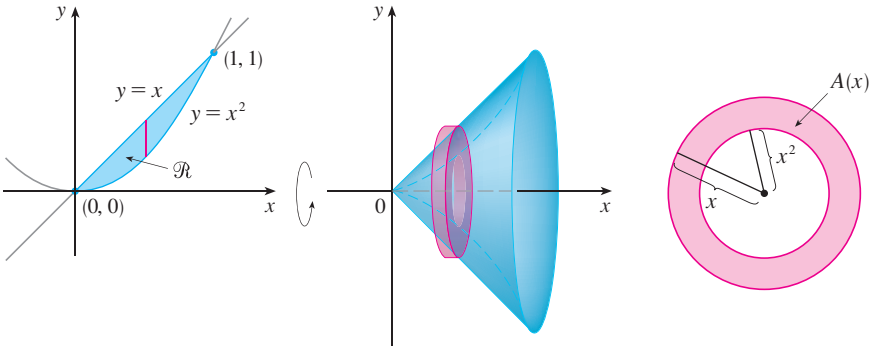


FIGURA 8 (a) (b) (c)

EXEMPLO 5 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região no Exemplo 4 em torno da reta $y = 2$.

SOLUÇÃO O sólido e a secção transversal são mostrados na Figura 9. Novamente, a secção transversal é uma arruela, mas dessa vez o raio interno é $2 - x$ e o raio externo é $2 - x^2$.

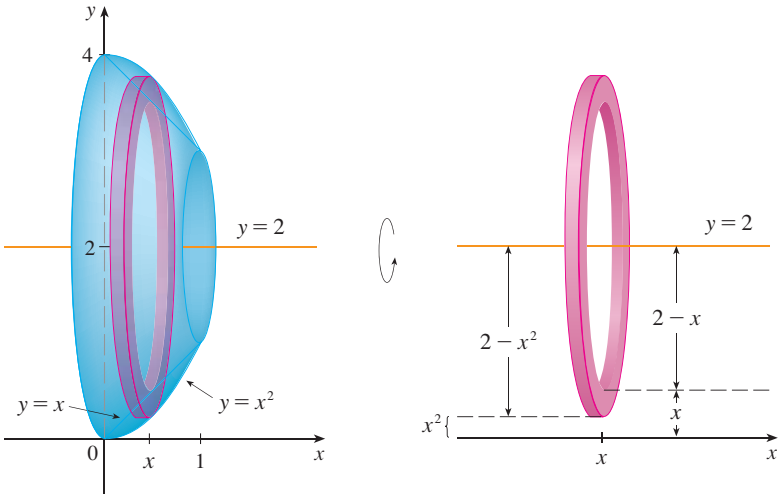


FIGURA 9

A área de secção transversal é

$$A(x) = \pi(2 - x^2)^2 - \pi(2 - x)^2$$

de modo que o volume de S é

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)\,dx \\ &= \pi\int_0^1 [(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2]\,dx \\ &= \pi\int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4x)\,dx \\ &= \pi\left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

Os sólidos nos Exemplos 1 a 5 são todos chamados **sólidos de revolução** porque são obtidos pela rotação de uma região em torno de um eixo. Em geral, calculamos o volume de um sólido de revolução usando a fórmula básica da definição

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \qquad \text{ou} \qquad V = \int_c^d A(y)\,dy$$

e encontramos a área da seção transversal $A(x)$ ou $A(y)$ por uma das seguintes maneiras:

- Se a secção transversal é um disco (como nos Exemplos 1 a 3), encontramos o raio do disco (em termos de x ou y) e usamos

$$A = \pi\,(\text{raio})^2$$

- Se a secção transversal é uma arruela (como nos Exemplos 4 e 5), encontramos o raio interno r_{int} e o raio externo r_{ext} a partir de um esboço (como nas Figuras 8, 9 e 10), e calculamos a área da arruela subtraindo a área do disco interno da área do disco externo:

$$A = \pi\,(\text{raio externo})^2 - \pi\,(\text{raio interno})^2$$

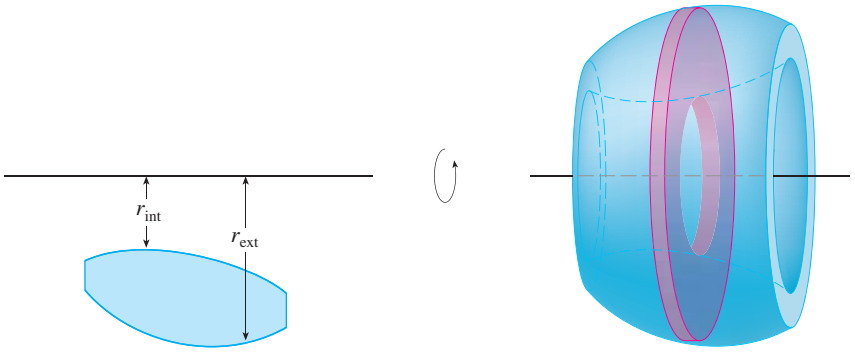


FIGURA 10

O próximo exemplo ilustra melhor o procedimento.

EXEMPLO 6 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região no Exemplo 4 em torno da reta $x = -1$.

SOLUÇÃO A Figura 11 mostra uma secção transversal horizontal. É uma arruela com raio interno $1 + y$ e raio externo $1 + \sqrt{y}$; assim, a área de secção transversal é

$$\begin{aligned} A(y) &= \pi\,(\text{raio externo})^2 - \pi\,(\text{raio interno})^2 \\ &= \pi\left(1 + \sqrt{y}\right)^2 - \pi\,(1 + y)^2 \end{aligned}$$

O volume é

$$V = \int_0^1 A(y)\,dy = \pi \int_0^1 \left[\left(1 + \sqrt{y}\right)^2 - (1 + y)^2\right] dy$$

$$= \pi \int_0^1 \left(2\sqrt{y} - y - y^2\right) dy = \pi\left[\frac{4y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

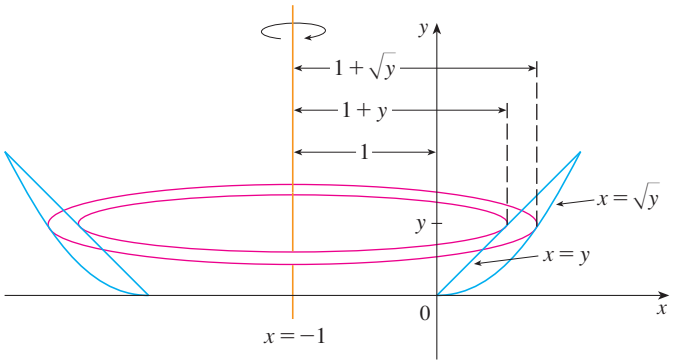


FIGURA 11

Agora encontraremos os volumes de dois sólidos que *não* são sólidos de revolução.

TEC *Visual 6.2C* mostra como o sólido na Figura 12 é gerado.

EXEMPLO 7 A Figura 12 mostra a forma de um sólido com base circular de raio 1. Secções transversais paralelas perpendiculares à base são triângulos equiláteros. Ache o volume do sólido.

SOLUÇÃO Vamos considerar o círculo como $x^2 + y^2 = 1$. O sólido, a sua base e uma secção transversal típica a uma distância x da origem são mostrados na Figura 13.

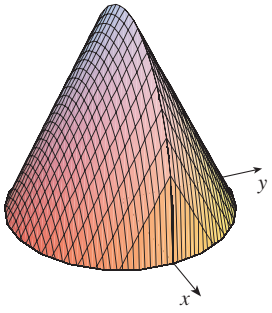
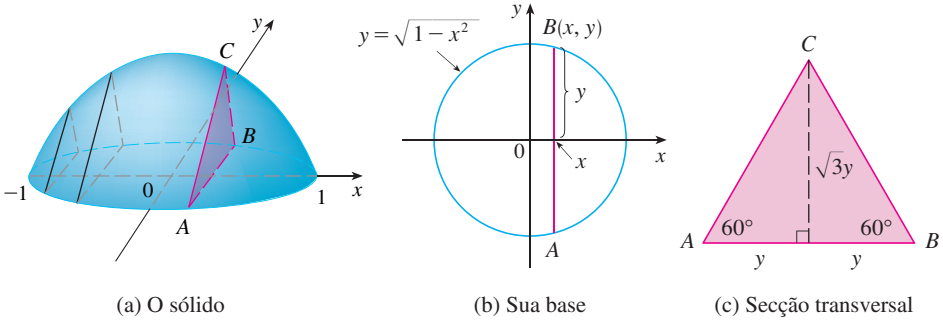


FIGURA 12
Gráfico gerado por computador do sólido descrito no Exemplo 7



(a) O sólido (b) Sua base (c) Secção transversal

FIGURA 13

Como B encontra-se no círculo, temos $y = \sqrt{1 - x^2}$ e, assim, a base do triângulo ABC será $|AB| = 2\sqrt{1 - x^2}$. Como o triângulo é equilátero, vemos a partir da Figura 13(c) que sua altura é $\sqrt{3}\, y = \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2}$. A área da secção transversal é, portanto,

$$A(x) = \tfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}\,(1 - x^2)$$

e o volume do sólido é

$$V = \int_{-1}^{1} A(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}\,(1 - x^2)\,dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} \sqrt{3}\,(1 - x^2)\,dx = 2\sqrt{3}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

EXEMPLO 8 Encontre o volume de uma pirâmide de base quadrada com lado L e cuja altura seja h.

SOLUÇÃO Colocamos a origem O no vértice da pirâmide e o eixo x ao longo do seu eixo central, como mostrado na Figura 14. Qualquer plano P_x que passa por x e é perpendicular ao eixo x intercepta a pirâmide em um quadrado com lado de comprimento s. Podemos expressar s em termos de x observando que, pelos triângulos semelhantes na Figura 15,

$$\frac{x}{h} = \frac{s/2}{L/2} = \frac{s}{L}$$

de modo que $s = Lx/h$. [Outro método é observar que a reta OP tem uma inclinação de $L/(2h)$ e dessa forma a sua equação é $y = Lx/(2h)$.] Portanto, a área da secção transversal é

$$A(x) = s^2 = \frac{L^2}{h^2}x^2$$

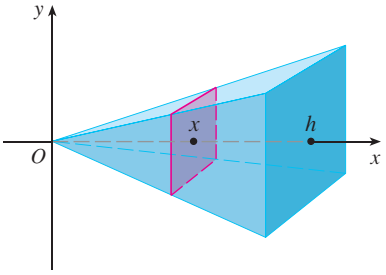


FIGURA 14

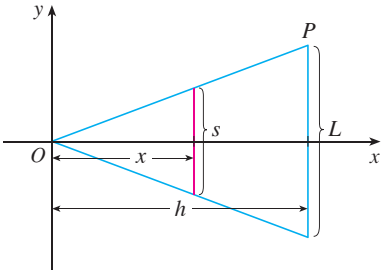


FIGURA 15

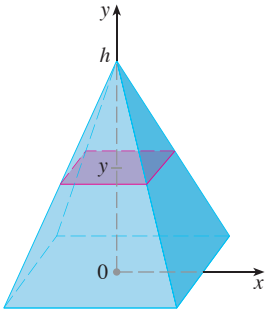


FIGURA 16

A pirâmide está entre $x = 0$ e $x = h$, então o seu volume é

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{L^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big]_0^h = \frac{L^2h}{3}$$

OBSERVAÇÃO Não precisamos colocar o vértice da pirâmide na origem no Exemplo 8. Nós o fizemos meramente para tornar as equações mais simples. Se, em vez disso, tivéssemos colocado o centro da base na origem e o vértice no semieixo positivo y, como na Figura 16, você pode verificar que teríamos obtido a integral

$$V = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}(h - y)^2\,dy = \frac{L^2h}{3}$$

EXEMPLO 9 Uma cunha é cortada a partir de um cilindro circular de raio 4 por dois planos. Um plano é perpendicular ao eixo do cilindro. O outro intercepta o primeiro com um ângulo de 30º ao longo de um diâmetro do cilindro. Encontre o volume da cunha.

SOLUÇÃO Se colocarmos o eixo x ao longo do diâmetro onde os planos se encontram, então a base do sólido é um semicírculo com a equação $y = \sqrt{16 - x^2}$, $-4 \leq x \leq 4$. Uma secção transversal perpendicular ao eixo x a uma distância x da origem é um triângulo ABC, como mostrado na Figura 17, cuja base é $y = \sqrt{16 - x^2}$ e cuja altura é $|BC| = y\,\text{tg}\,30° = \sqrt{16 - x^2}/\sqrt{3}$. Portanto, a área da secção transversal é

$$A(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{16 - x^2} = \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}$$

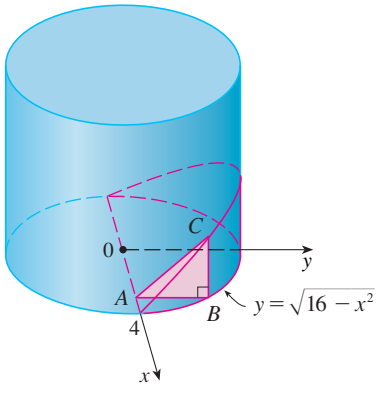
e o volume é

$$V = \int_{-4}^{4} A(x)\,dx = \int_{-4}^{4} \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^4 (16 - x^2)\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$= \frac{128}{3\sqrt{3}}$$

Para outro método, consulte o Exercício 62.



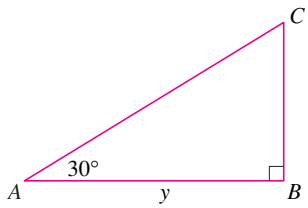


FIGURA 17

6.2 Exercícios

1–18 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno das retas especificadas. Esboce a região, o sólido e um disco ou arruela típicos.

1. $y = 2 - \frac{1}{2}x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2;$ em torno do eixo x

2. $y = 1 - x^2,\ y = 0;$ em torno do eixo x

3. $y = 1/x,\ x = 1,\ x = 2,\ y = 0;$ em torno do eixo x

4. $y = \sqrt{25 - x^2},\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4;$ em torno do eixo x

5. $x = 2\sqrt{y},\ x = 0,\ y = 9;$ em torno do eixo y

6. $y = \ln x,\ y = 1,\ y = 2,\ x = 0;$ em torno do eixo y

7. $y = x^3,\ y = x,\ x \geqslant 0;$ em torno do eixo x

8. $y = \frac{1}{4}x^2,\ y = 5 - x^2;$ em torno do eixo x

9. $y^2 = x,\ x = 2y;$ em torno do eixo y

10. $y = \frac{1}{4}x^2,\ x = 2,\ y = 0;$ em torno do eixo y

11. $y = x^2,\ x = y^2;$ em torno de $y = 1$

12. $y = e^{-x},\ y = 1,\ x = 2;$ em torno de $y = 2$

13. $y = 1 + \sec x,\ y = 3;$ em torno de $y = 1$

14. $y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x,\ 0 \leq x \leq \pi/4;$ em torno de $y = -1$

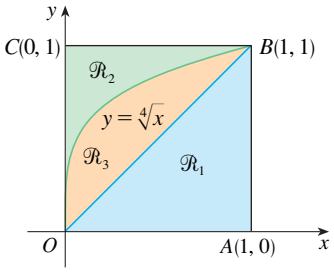
15. $x = y^2,\ x = 1;$ em torno de $x = 1$

16. $y = x,\ y = \sqrt{x};$ em torno de $x = 2$

17. $y = x^2,\ x = y^2;$ em torno de $x = -1$

18. $y = x,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4;$ em torno de $x = 1$

19–30 Veja a figura e encontre o volume gerado pela rotação da região ao redor da reta especificada.



19. $\mathcal{R}_1$ em torno de OA

20. $\mathcal{R}_1$ em torno de OC

21. $\mathcal{R}_1$ em torno de AB

22. $\mathcal{R}_1$ em torno de BC

23. $\mathcal{R}_2$ em torno de OA

24. $\mathcal{R}_2$ em torno de OC

25. $\mathcal{R}_2$ em torno de AB

26. $\mathcal{R}_2$ em torno de BC

27. $\mathcal{R}_3$ em torno de OA

28. $\mathcal{R}_3$ em torno de OC

29. $\mathcal{R}_3$ em torno de AB

30. $\mathcal{R}_3$ em torno de BC

31–34 Encontre uma integral para o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas sobre a reta especificada. Em seguida, use a calculadora para determinar a integral com precisão de cinco casas decimais.

31. $y = e^{-x^2},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1$

(a) em torno do eixo x (b) em torno de $y = -1$

32. $y = 0,\ y = \cos^2 x,\ -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

(a) em torno do eixo x (b) em torno de $y = 1$

33. $x^2 + 4y^2 = 4$

(a) em torno de $y = 2$ (b) em torno de $x = 2$

34. $y = x^2,\ x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0$

(a) em torno do eixo x (b) em torno do eixo y

35–36 Use um gráfico para encontrar os valores aproximados das coordenadas x dos pontos de intersecção das curvas indicadas. Em seguida, use a calculadora para encontrar (aproximadamente) o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região delimitada por essas curvas.

35. $y = 2 + x^2 \cos x,\quad y = x^4 + x + 1$

36. $y = 3 \operatorname{sen}(x^2),\quad y = e^{x/2} + e^{-2x}$

37–38 Use um sistema de computação algébrica para achar o volume exato do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno da reta especificada.

37. $y = \operatorname{sen}^2 x,\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ em torno de $y = -1$

38. $y = x,\ y = xe^{1-x/2};$ em torno de $y = 3$

39–42 Cada integral representa o volume de um sólido. Descreva o sólido.

39. $\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$

40. $\pi \int_{-1}^{1} (1 - y^2)\, dy$

41. $\pi \int_0^1 (y^4 - y^8)\, dy$

42. $\pi \int_0^{\pi/2} [(1 + \cos x)^2 - 1^2]\, dx$

43. Uma tomografia computadorizada produz vistas de secções transversais igualmente espaçadas de um órgão humano, as quais fornecem informações sobre esse órgão que, de outra maneira, só seriam obtidas por cirurgia. Suponha que uma tomografia computadorizada de um fígado humano mostre secções transversais espaçadas por 1,5 cm. O fígado tem 15 cm de comprimento e as áreas das secções transversais, em centímetros quadrados, são 0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 39 e 0. Use a Regra do Ponto Médio para estimar o volume do fígado.

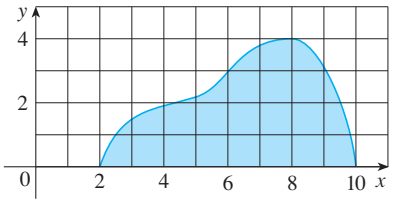
44. Um tronco de 10 m de comprimento é cortado a intervalos de 1 m e as suas áreas de secção transversal A (a uma distância x da extremidade do tronco) estão listadas na tabela. Use a Regra do Ponto Médio com $n = 5$ para estimar o volume do tronco.

x (m)	A (m^2)	x (m)	A (m^2)
0	0,68	6	0,53
1	0,65	7	0,55
2	0,64	8	0,52
3	0,61	9	0,50
4	0,58	10	0,48
5	0,59		

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

45. (a) Se a região mostrada na figura for girada em torno do eixo x para formar um sólido, use a Regra do Ponto Médio, com $n = 4$, para estimar o volume do sólido.



(b) Estime o volume se a região for girada em torno do eixo y. Novamente use a regra do ponto médio com $n = 4$.

SCA **46.** (a) Um modelo para a forma do ovo de um pássaro é obtido girando, em torno do eixo x, a região sob o gráfico de

$$f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\sqrt{1 - x^2}$$

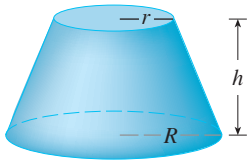
Use um SCA para encontrar o volume deste ovo.

(b) Para uma certa espécie de pássaro, $a = -0{,}06$, $b = 0{,}04$, $c = 0{,}1$, e $d = 0{,}54$. Trace o gráfico de f e encontre o volume de um ovo desta espécie.

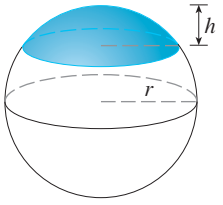
47–59 Encontre o volume do sólido S descrito.

47. Um cone circular reto com altura h e base com raio r.

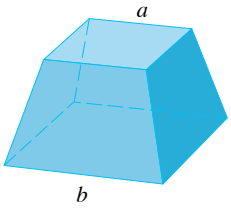
48. Um tronco de um cone circular reto com altura h, raio da base inferior R e raio de base superior r.



49. Uma calota de uma esfera de raio r e altura h.



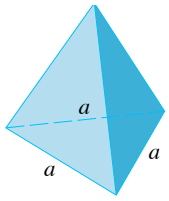
50. Um tronco de pirâmide com base quadrada de lado b, topo quadrado de lado a e altura h.



O que acontece se $a = b$? O que acontece se $a = 0$?

51. Uma pirâmide com altura h e base retangular com lados b e $2b$.

52. Uma pirâmide com altura h e base triangular equilátera com lado a (um tetraedro).



53. Um tetraedro com três faces perpendiculares entre si e as três arestas perpendiculares entre si com comprimentos de 3 cm, 4 cm e 5 cm.

54. A base de S é um disco circular com raio r. As secções transversais paralelas, perpendiculares à base, são quadradas.

55. A base de S é uma região elíptica delimitada pela curva $9x^2 + 4y^2 = 36$. As secções transversais perpendiculares ao eixo x são triângulos isósceles retos com hipotenusa na base.

56. A base de S é a região triangular com vértices (0,0), (1,0), e (0,1). As secções transversais perpendiculares ao eixo y são triângulos equiláteros.

57. A base de S é a mesma base do Exercício 56, mas as secções transversais perpendiculares ao eixo x são quadradas.

58. A base de S é a região delimitada pela parábola $y = 1 - x^2$ e pelo eixo x. As secções transversais perpendiculares ao eixo y são quadradas.

59. A base de S é a mesma base do Exercício 58, mas as secções transversais perpendiculares ao eixo x são triângulos isósceles com altura igual à base.

---

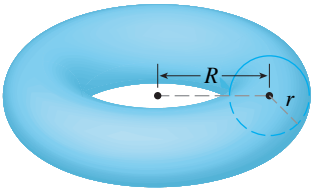
60. A base de S é um disco circular com raio r. As secções transversais paralelas, perpendiculares à base, são triângulos isósceles de altura h e lado desigual na base.

(a) Estabeleça uma integral para o volume de S.

(b) Interpretando a integral como uma área, encontre o volume de S.

61. (a) Escreva uma integral para o volume de um *toro* sólido (o sólido com formato de rosquinha da figura) com raios r e R.

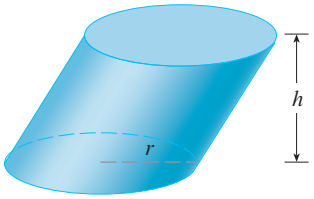
(b) Interpretando a integral como uma área, encontre o volume do toro.



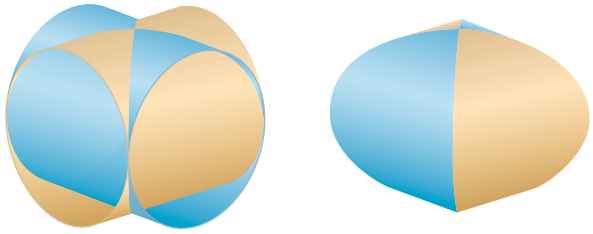
62. Resolva o Exemplo 9 tomando secções transversais paralelas à reta de intersecção dos dois planos.

63. (a) O Princípio de Cavalieri afirma que, se uma família de planos paralelos produzem áreas de secção transversal iguais para dois sólidos S_1 e S_2, então os volumes de S_1 e S_2 são iguais. Demonstre esse princípio.

(b) Use o Princípio de Cavalieri para encontrar o volume do cilindro oblíquo mostrado na figura.



64. Encontre o volume comum de dois cilindros circulares, cada um com raio r, se os eixos dos cilindros se interceptam em ângulos retos.



65. Encontre o volume comum de duas esferas, cada qual com raio r, se o centro de cada esfera está na superfície da outra esfera.

66. Uma tigela tem a forma de um hemisfério com diâmetro de 30 cm. Uma bola pesada com diâmetro de 10 cm é colocada dentro da tigela, e depois despeja-se água até uma profundidade de h centímetros. Encontre o volume de água na tigela.

67. Um buraco de raio r é perfurado pelo meio de um cilindro de raio $R > r$ com ângulo reto em relação ao eixo do cilindro. Encontre, mas não calcule, uma integral para o volume cortado.

68. Um buraco de raio r é perfurado através do centro de uma esfera de raio $R > r$. Encontre o volume da porção remanescente da esfera.

69. Alguns dos pioneiros do cálculo, como Kepler e Newton, foram inspirados pelo problema de encontrar os volumes de barris de vinho. (De fato, Kepler publicou um livro em 1615, *Stereometria doliorum*, dedicado aos métodos para encontrar os volumes de barris.) Eles frequentemente aproximavam a forma dos lados por parábolas.

(a) Um barril com altura A e raio máximo R é construído pela rotação ao redor do eixo da parábola $y = R - cx^2$, $-h/2 \leq x \leq h/2$, onde c é uma constante positiva. Mostre que o raio de cada extremidade do barril é $r = R - d$, onde $d = ch^2/4$.

(b) Mostre que o volume delimitado pelo barril é

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h\left(2R^2 + r^2 - \tfrac{2}{5}d^2\right)$$

70. Suponha que a região $\mathcal{R}$ tenha área A e esteja acima do eixo x. Quando $\mathcal{R}$ é girada em torno de eixo x, ela gera um sólido com volume V_1. Quando $\mathcal{R}$ é girada em torno da reta $y = -k$ (onde k é um número positivo), ela gera um sólido com volume V_2. Expresse V_2 em termos de V_1, k e A.

6.3 Volumes por Cascas Cilíndricas

Alguns problemas de volume são muito difíceis de lidar pelos métodos da seção anterior. Por exemplo, vamos considerar o problema de encontrar o volume de um sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região delimitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$. (Veja a Figura 1.) Se a fatiarmos perpendicularmente ao eixo y, obteremos uma arruela. No entanto, para calcularmos os raios interno e externo da arruela, teríamos de resolver a equação cúbica $y = 2x^2 - x^3$ para x em termos de y, o que não é fácil.

Felizmente, existe um método chamado **método das cascas cilíndricas**, que é mais fácil de usar em casos como esse. A Figura 2 mostra uma casca cilíndrica com raio interno r_1, raio externo r_2, e altura h. Seu volume V é calculado subtraindo-se o volume V_1 do cilindro interno do volume V_2 do cilindro externo:

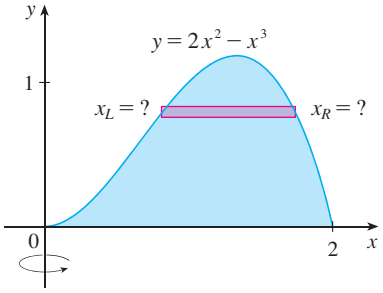


FIGURA 1

$$V = V_2 - V_1 = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h$$

$$= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h = 2\pi\frac{r_2 + r_1}{2}h(r_2 - r_1)$$

Se fizermos $\Delta r = r_2 - r_1$ (a espessura da casca) e $r = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ (o raio médio da casca), então a fórmula para o volume de uma casca cilíndrica se torna

1

$$\boxed{V = 2\pi r h\,\Delta r}$$

e pode ser memorizada como

$$V = [\text{circunferência}][\text{altura}][\text{espessura}].$$

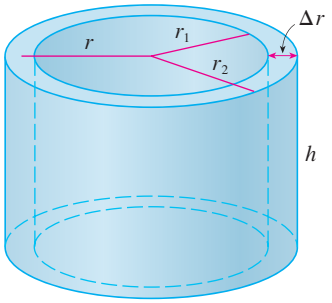


FIGURA 2

Agora, considere S o sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região limitada por $y = f(x)$ [onde $f(x) \geqslant 0$], $y = 0$, $x = a$ e $x = b$, onde $b > a \geqslant 0$. (Veja a Figura 3.)

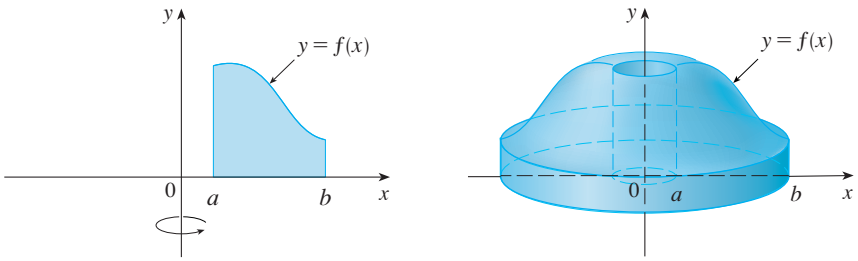


FIGURA 3

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de mesma largura Δx e consideramos $\bar{x}_i$ o ponto médio do i-ésimo subintervalo. Se o retângulo com base $[x_{i-1}, x_i]$ e altura $f(\bar{x}_i)$ é girado ao redor do eixo y, então o resultado é uma casca cilíndrica com raio médio $\bar{x}_i$, altura $f(\bar{x}_i)$ e espessura Δx (veja a Figura 4), assim, pela Fórmula 1 seu volume é

$$V_i = (2\pi\bar{x}_i)[f(\bar{x}_i)]\,\Delta x$$

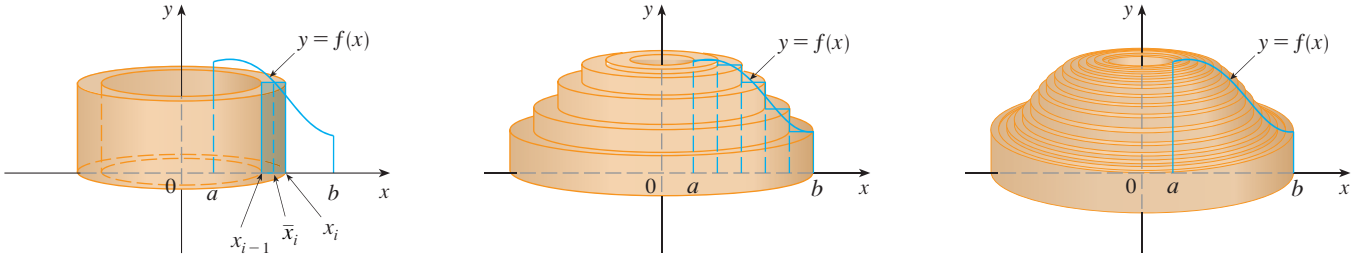


FIGURA 4

Portanto, uma aproximação para o volume V de S é dada pela soma dos volumes dessas cascas:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi\bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

Essa aproximação parece tornar-se melhor quando $n \to \infty$. Mas, pela definição de uma integral, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

Então, a seguinte definição parece plausível:

2 O volume do sólido na Figura 3, obtido pela rotação em torno do eixo y da região sob a curva $y = f(x)$ de a até b, é

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx \qquad \text{onde } 0 \leqslant a < b$$

O uso do argumento das cascas cilíndricas faz a Fórmula 2 parecer razoável, porém mais tarde seremos capazes de demonstrá-la (veja o Exercício 71 na Seção 7.1).

A melhor maneira para se lembrar da Fórmula 2 é pensar em uma casca típica, cortada e achatada como na Figura 5, com raio x, circunferência $2\pi x$, altura $f(x)$ e espessura Δx ou dx:

$$\int_a^b \underbrace{(2\pi x)}_{\text{circunferência}} \underbrace{[f(x)]}_{\text{altura}} \underbrace{dx}_{\text{espessura}}$$

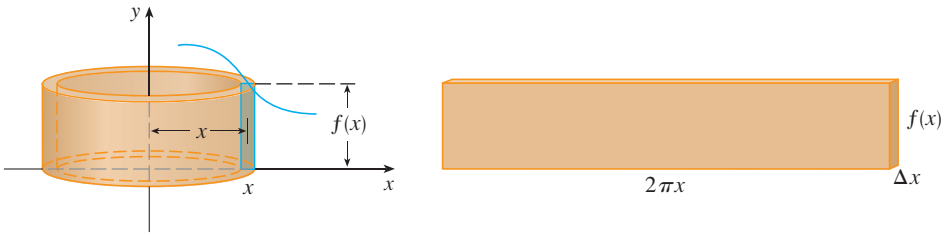


FIGURA 5

Esse tipo de argumento será útil em outras situações, tais como quando giramos em torno de outras retas além do eixo y.

EXEMPLO 1 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região delimitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$.

SOLUÇÃO Do esboço da Figura 6, vemos que uma casca típica tem raio x, circunferência $2\pi x$ e altura $f(x) = 2x^2 - x^3$. Então, pelo método das cascas, o volume é

$$V = \int_0^2 (2\pi x)(2x^2 - x^3)\,dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\,dx$$

$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2 = 2\pi\left(8 - \tfrac{32}{5}\right) = \tfrac{16}{5}\pi$$

Pode-se verificar que o método das cascas fornece a mesma resposta que o método das fatias.

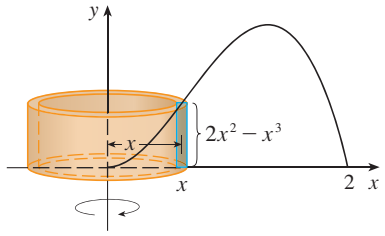


FIGURA 6

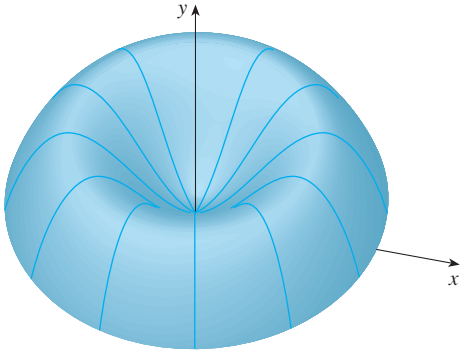


FIGURA 7

A Figura 7 mostra o gráfico gerado pelo computador do sólido do qual calculamos o volume no Exemplo 1.

OBSERVAÇÃO Comparando a solução do Exemplo 1 com as observações no começo desta seção, vemos que o método das cascas cilíndricas é muito mais prático que o método das arruelas para este problema. Não tivemos de encontrar as coordenadas do máximo local e não tivemos de resolver a equação da curva para x em termos de y. Contudo, utilizar os métodos da seção anterior em outros exemplos pode ser mais fácil.

EXEMPLO 2 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região entre $y = x$ e $y = x^2$.

SOLUÇÃO A região e uma casca típica são mostradas na Figura 8. Vemos que a casca tem raio x, circunferência $2\pi x$ e altura $x - x^2$. Assim, o volume é

$$V = \int_0^1 (2\pi x)(x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$$

$$= 2\pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

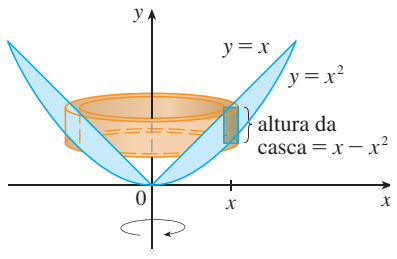


FIGURA 8

Como mostra o exemplo a seguir, o método das cascas funciona tão bem quanto se girarmos em torno do eixo x. Nós simplesmente temos que desenhar um diagrama para identificar o raio e a altura da casca.

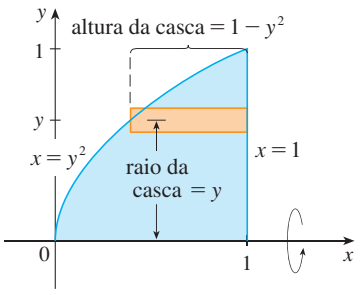


FIGURA 9

EXEMPLO 3 Use cascas cilíndricas para encontrar o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ de 0 até 1.

SOLUÇÃO Este problema foi resolvido utilizando os discos no Exemplo 2 da Seção 6.2. Para o uso de cascas, reescrevemos a curva $y = \sqrt{x}$ (na figura daquele exemplo) como $x = y^2$ na Figura 9. Pela rotação em torno do eixo x vemos que uma casca típica tem raio y, circunferência $2\pi y$ e altura $1 - y^2$. Assim, o volume é

$$V = \int_0^1 (2\pi y)(1 - y^2)\,dy = 2\pi \int_0^1 (y - y^3)\,dy = 2\pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Neste exemplo, o método do disco foi mais simples.

EXEMPLO 4 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada por $y = x - x^2$ e $y = 0$ em torno da reta $x = 2$.

SOLUÇÃO A Figura 10 mostra a região e a casca cilíndrica formada pela rotação em torno da reta $x = 2$. Esta tem raio $2 - x$, circunferência $2\pi(2 - x)$ e altura $x - x^2$.

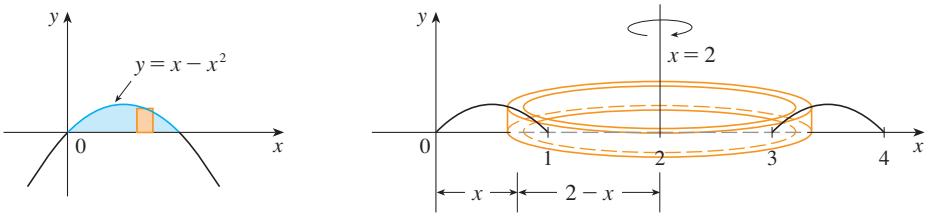


FIGURA 10

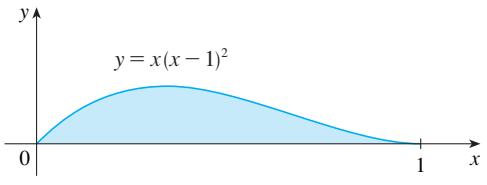
O volume do sólido dado é

$$V = \int_0^1 2\pi(2 - x)(x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

6.3 Exercícios

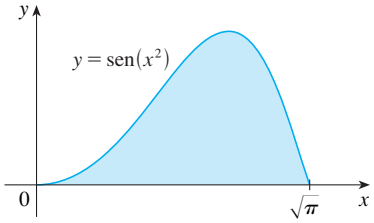
1. Considere S o sólido obtido pela rotação da região mostrada na figura em torno do eixo y. Explique por que é complicado usar fatias para encontrar o volume V de S. Esboce uma casca de aproximação típica. Quais são a circunferência e a altura? Use cascas para encontrar V.



É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

2. Considere S o sólido obtido pela rotação da região mostrada na figura em torno do eixo y. Esboce uma casca cilíndrica típica e encontre sua circunferência e altura. Use cascas para encontrar o volume S. Você acha que esse método é preferível ao fatiamento? Explique.



3–7 Use o método das cascas cilíndricas para achar o volume gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas em torno do eixo y.

3. $y = 1/x,\quad y = 0,\quad x = 1,\quad x = 2$

4. $y = x^2,\quad y = 0,\quad x = 1$

5. $y = e^{-x^2},\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 1$

6. $y = 4x - x^2,\quad y = x$

7. $y = x^2,\quad y = 6x - 2x^2$

---

8. Considere V o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região delimitada por $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$. Encontre V pelo fatiamento e por cascas cilíndricas. Em ambos os casos, desenhe um diagrama para explicar seu método.

9–14 Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno do eixo x.

9. $xy = 1,\quad x = 0,\quad y = 1,\quad y = 3$

10. $y = \sqrt{x},\quad x = 0,\quad y = 2$

11. $y = x^3,\quad y = 8,\quad x = 0$

12. $x = 4y^2 - y^3,\quad x = 0$

13. $x = 1 + (y - 2)^2,\quad x = 2$

14. $x + y = 3,\quad x = 4 - (y - 1)^2$

15–20 Use o método das cascas cilíndricas para achar o volume gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno do eixo especificado.

15. $y = x^4,\ y = 0,\ x = 1;$ em torno de $x = 2$

16. $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 1;$ em torno de $x = -1$

17. $y = 4x - x^2,\ y = 3;$ em torno de $x = 1$

18. $y = x^2,\ y = 2 - x^2;$ em torno de $x = 1$

19. $y = x^3,\ y = 0,\ x = 1;$ em torno de $y = 1$

20. $y = x^2 + 1,\ x = 2;$ em torno de $y = -2$

21–26

(a) Escreva uma integral para o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno do eixo especificado.

(b) Use sua calculadora para determinar a integral com precisão de cinco casas decimais.

21. $y = xe^{-x},\ y = 0,\ x = 2;$ em torno do eixo y

22. $y = \operatorname{tg} x,\ y = 0,\ x = \pi/4;$ em torno de $x = \pi/2$

23. $y = \cos^4 x,\ y = -\cos^4 x,\ -\pi/2 \le x \le \pi/2;$ em torno de $x = \pi$

24. $y = x,\ y = 2x/(1 + x^3);$ em torno de $x = -1$

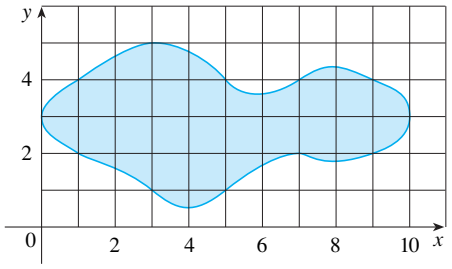
25. $x = \sqrt{\operatorname{sen} y},\ 0 \le y \le \pi,\ x = 0;$ em torno de $y = 4$

26. $x^2 - y^2 = 7,\ x = 4;$ em torno de $y = 5$

---

27. Use a Regra do Ponto Médio com $n = 5$ para estimar o volume obtido pela rotação em torno do eixo y da região sob a curva $y = \sqrt{1 + x^3},\ 0 \le x \le 1$.

28. Se a região mostrada na figura for girada em torno do eixo y para formar um sólido, use a Regra do Ponto Médio, com $n = 5$, para estimar o volume do sólido.



29–32 Cada integral representa o volume de um sólido. Descreva o sólido.

29. $\displaystyle\int_0^3 2\pi x^5\,dx$

30. $\displaystyle 2\pi\int_0^2 \frac{y}{1 + y^2}\,dy$

31. $\displaystyle\int_0^1 2\pi(3 - y)(1 - y^2)\,dy$

32. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} 2\pi(\pi - x)(\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx$

33–34 Use um gráfico para encontrar os valores aproximados das coordenadas x dos pontos de intersecção das curvas indicadas. A seguir, use essa informação para estimar o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região delimitada por essas curvas.

33. $y = e^x,\quad y = \sqrt{x} + 1$

34. $y = x^3 - x + 1,\quad y = -x^4 + 4x - 1$

35–36 Use um sistema de computação algébrica para achar o volume exato do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno da reta especificada.

35. $y = \operatorname{sen}^2 x,\ y = \operatorname{sen}^4 x,\ 0 \le x \le \pi;$ em torno de $x = \pi/2$

36. $y = x^3 \operatorname{sen} x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \pi;$ em torno de $x = -1$

37–43 A região delimitada pelas curvas dadas é girada em torno do eixo especificado. Ache o volume do sólido resultante por qualquer método.

37. $y = -x^2 + 6x - 8,\ y = 0;$ em torno do eixo y

38. $y = -x^2 + 6x - 8,\ y = 0;$ em torno do eixo x

39. $y^2 - x^2 = 1,\ y = 2;$ em torno do eixo x

40. $y^2 - x^2 = 1,\ y = 2;$ em torno do eixo y

41. $x^2 + (y - 1)^2 = 1;$ em torno do eixo y

42. $x = (y - 3)^2,\ x = 4;$ em torno de $y = 1$

43. $x = (y - 1)^2,\ x - 1 = 1;$ em torno de $x = -1$

---

44. Considere T a região triangular com vértices (0,0), (0,1) e (1,2), e considere V o volume do sólido obtido quando T é girado em torno da reta $x = a$, onde $a > 1$. Expresse a em termos de V.

45–47 Use cascas cilíndricas para encontrar o volume do sólido.

45. Uma esfera de raio r.

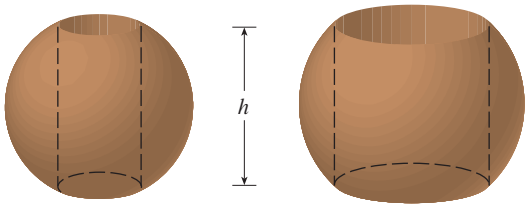
46. O toro sólido do Exercício 61 da Seção 6.2.

47. Um cone circular reto com altura h e base com raio r.

48. Suponha que você faça anéis para guardanapos perfurando buracos com diferentes diâmetros através de duas bolas de madeira (as quais também têm diferentes diâmetros). Você descobre que ambos os anéis de guardanapo têm a mesma altura h, como mostrado na figura.

(a) Faça uma conjectura sobre qual anel tem mais madeira.

(b) Verifique o seu palpite: use cascas cilíndricas para calcular o volume de um anel de guardanapo criado pela perfuração de um buraco com raio r através do centro de uma esfera com raio R e expresse a resposta em termos de h.



6.4 Trabalho

O termo *trabalho* é usado na linguagem cotidiana significando a quantidade de esforço necessária para executar uma tarefa. Na física esse termo tem um significado técnico que depende do conceito de *força*. Intuitivamente, você pode pensar em força como descrevendo um empurrar ou puxar sobre um objeto – por exemplo, um empurrão horizontal em um livro sobre uma mesa ou a ação da gravidade terrestre sobre uma bola. Em geral, se um objeto se move ao longo de uma reta com função de posição $s(t)$, então a **força** F no objeto (na mesma direção) é definida pela Segunda Lei de Newton do Movimento como o produto de sua massa m pela sua aceleração:

1
$$F = m\frac{d^2s}{dt^2}.$$

No Sistema Métrico Internacional (SI), a massa é medida em quilogramas (kg), o deslocamento em metros (m), o tempo em segundos (s) e a força em newtons (N = kg·m/s^2). Então, uma força de 1 N atuando em uma massa de 1 kg produz uma aceleração de 1 m/s^2. No sistema usual norte-americano, a unidade de força escolhida é a libra.

No caso de aceleração constante, a força F também é constante, e o trabalho feito é definido pelo produto da força F pela distância d na qual o objeto se move:

2
$$W = Fd \qquad \text{trabalho} = \text{força} \times \text{distância}$$

Se F é medida em newtons e d, em metros, então a unidade para W é o newton-metro, que é chamada joule (J). Se F é a medida em libras e d, em pés, então a unidade para W é libra-pé (lb-pé), que equivale a cerca de 1,36 J.

EXEMPLO 1

(a) Quanto trabalho é exercido ao se levantar um livro de 1,2 kg do chão até uma carteira de altura 0,7 m? Considere que a aceleração da gravidade é $g = 9{,}8$ m/s^2.

(b) Quanto trabalho é feito levantando-se um peso de 20 lb a uma altura de 6 pés do chão?

SOLUÇÃO

(a) A força exercida é igual e oposta à força exercida pela gravidade. Então, a Equação 1 fornece

$$F = mg = (1{,}2)(9{,}8) = 11{,}76 \text{ N}$$

e a Equação 2 nos dá o trabalho executado como

$$W = Fd = (11{,}76)(0{,}7) \approx 8{,}2 \text{ J}$$

(b) Aqui a força dada é $F = 20$ lb, portanto o trabalho executado é

$$W = Fd = 20 \cdot 6 = 120 \text{ lb-pé}$$

Observe que no item (b), ao contrário da parte (a), não tivemos de multiplicar por g porque nos foi dado o *peso* (que já é força) e não a massa do objeto.

A Equação 2 define trabalho desde que a força seja constante. Mas o que acontece se a força for variável? Suponha que o objeto se mova ao longo do eixo x na direção positiva de $x = a$ para $x = b$, e em cada ponto x entre a e b uma força $f(x)$ atue no objeto, onde f é uma função contínua. Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com extremidades $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e larguras iguais a Δx. Escolhemos o ponto amostral x_i^* no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então, a força naquele ponto é $f(x_i^*)$. Se n é grande, então Δx é pequeno, e como f é contínua, os valores de f não variam muito ao longo do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Em outras palavras, f é praticamente constante no intervalo e, então, o trabalho W_i que é executado a partir do movimento da partícula de x_{i-1} para x_i é determinado aproximadamente pela Equação 2:

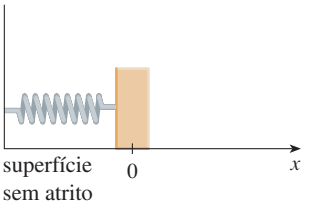
$$W_i \approx f(x_i^*)\,\Delta x$$

Portanto, podemos aproximar o trabalho total por

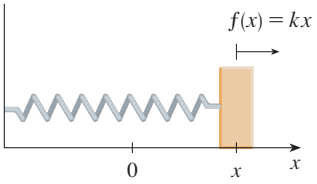
$$W \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x \qquad \boxed{3}$$

Parece que a aproximação torna-se cada vez melhor quando n aumenta. Portanto, definimos o **trabalho feito no movimento de um objeto de *a* para *b*** como o limite dessa quantidade quando $n \to \infty$. Como o lado direito de $\boxed{3}$ é uma soma de Riemann, reconhecemos seu limite como uma integral definida e, então,

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \boxed{4}$$



(a) Posição natural da mola



(b) Posição esticada da mola

FIGURA 1
Lei de Hooke

EXEMPLO 2 Quando uma partícula está localizada a uma distância de x metros da origem, uma força de $x^2 + 2x$ newtons age sobre ela. Quanto trabalho é realizado movendo-a de $x = 1$ para $x = 3$?

SOLUÇÃO
$$W = \int_1^3 (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 \Big]_1^3 = \frac{50}{3}$$

O trabalho feito é de $16\frac{2}{3}$ J.

No próximo exemplo usamos uma lei da física: a **Lei de Hooke** afirma que a força necessária para manter uma mola esticada x unidades além do seu comprimento natural é proporcional a x:

$$f(x) = kx$$

onde k é uma constante positiva (chamada **constante da mola**). A Lei de Hooke vale desde que x não seja muito grande (veja a Figura 1).

EXEMPLO 3 Uma força de 40 N é necessária para segurar uma mola que foi esticada do seu comprimento natural de 10 cm para um comprimento de 15 cm. Quanto trabalho é feito esticando-se a mola de 15 cm para 18 cm?

SOLUÇÃO De acordo com a Lei de Hooke, a força necessária para manter uma mola esticada x metros além do seu comprimento natural é $f(x) = kx$. Quando a mola é esticada de 10 cm para 15 cm, a quantidade esticada é 5 cm = 0,05 m. Isso significa que $f(0{,}05) = 40$, assim

$$0{,}05k = 40 \qquad k = \frac{40}{0{,}05} = 800$$

Portanto, $f(x) = 800x$ e o trabalho realizado para esticar a mola de 15 cm para 18 cm é

$$W = \int_{0,05}^{0,08} 800x\,dx = 800\,\frac{x^2}{2}\Big]_{0,05}^{0,08}$$
$$= 400[(0,08)^2 - (0,05)^2] = 1,56 \text{ J}$$

EXEMPLO 4 Um cabo de 200 lb (90,72 kg) tem 100 pés (30,48 m) de comprimento e está pendurado verticalmente a partir do topo de um edifício alto. Qual o trabalho necessário para puxar o cabo para o topo do edifício?

SOLUÇÃO Aqui não temos uma fórmula para a função força, mas podemos usar um argumento semelhante ao que nos levou à Definição 4.

Vamos posicionar a origem no topo do edifício e o eixo x apontando para baixo, como na Figura 2. Dividimos o cabo em pequenos pedaços de comprimento Δx. Se x_i^* é um ponto no i-ésimo intervalo, então todos os pontos nesse intervalo são içados por aproximadamente a mesma distância, a saber, x_i^*. O cabo pesa 2 libras/pé (0,91 kg/0,3 m), logo, o peso da i-ésima parte é $2\Delta x$. Portanto, o trabalho realizado nessa i-ésima parte, em libra-pé, é

$$\underbrace{(2\,\Delta x)}_{\text{força}}\ \underbrace{x_i^*}_{\text{distância}} = 2x_i^*\,\Delta x$$

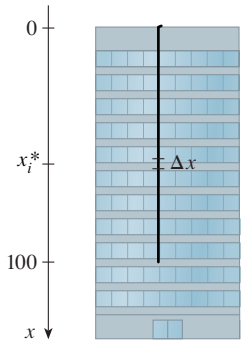


FIGURA 2

Se tivéssemos colocado a origem na extremidade do cabo e o eixo x apontando para cima, teríamos obtido

$$W = \int_0^{100} 2(100 - x)\,dx$$

que nos dá a mesma resposta.

Obtemos o trabalho total realizado somando todas essas aproximações e fazendo o número de partes se tornar grande (de modo que $\Delta x \to 0$):

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2x_i^*\,\Delta x = \int_0^{100} 2x\,dx$$
$$= x^2\Big]_0^{100} = 10\,000 \text{ lb-pé}$$

EXEMPLO 5 Um tanque de água possui o formato de um cone circular invertido com altura de 10 m e raio da base de 4 m. Ele está cheio de água até uma altura de 8 m. Encontre o trabalho necessário para esvaziar o reservatório bombeando toda a água pela parte superior do tanque. (A densidade da água é 1 000 kg/m^3.)

SOLUÇÃO Vamos medir as profundidades a partir do topo do tanque introduzindo uma coordenada vertical como na Figura 3. A água se estende de uma profundidade de 2 m até uma profundidade de 10 m e, então, dividimos o intervalo $[2, 10]$ em n subintervalos com extremidades $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e escolhemos x_i^* no i-ésimo subintervalo. Isso divide a água em n camadas. A i-ésima camada é aproximada por um cilindro circular de raio r_i e altura Δx. Podemos calcular r_i por triângulos semelhantes usando a Figura 4, como a seguir:

$$\frac{r_i}{10 - x_i^*} = \frac{4}{10} \qquad r_i = \tfrac{2}{5}(10 - x_i^*)$$

Então, uma aproximação para o volume da i-ésima camada de água é

$$V_i \approx \pi r_i^2\,\Delta x = \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2\,\Delta x$$

e, dessa forma, sua massa é

$$m_i = \text{densidade} \times \text{volume}$$
$$\approx 1\,000 \cdot \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2\,\Delta x = 160\pi(10 - x_i^*)^2\,\Delta x$$

A força necessária para elevar essa camada de água deve ser maior que a força da gravidade, e assim

$$F_i = m_i g \approx (9,8)160\pi(10 - x_i^*)^2\,\Delta x$$
$$\approx 1\,568\pi(10 - x_i^*)^2\,\Delta x$$

Cada partícula na camada deve se mover a uma distância de aproximadamente x_i^*. O trabalho W_i feito para elevar essa camada até o topo é aproximadamente o produto da força F_i e da distância x_i^*:

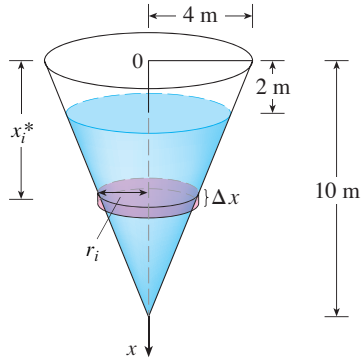


FIGURA 3

$$W_i \approx F_i x_i^* \approx 1\,568\pi x_i^*(10 - x_i^*)^2\,\Delta x$$

Para encontrarmos o trabalho total realizado para esvaziar o tanque, adicionamos as contribuições de cada uma das n camadas e, então, tomamos o limite quando $n \to \infty$:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1\,568\pi x_i^*(10 - x_i^*)^2\,\Delta x = \int_2^{10} 1\,568\pi x(10 - x)^2\,dx$$

$$= 1\,568\pi \int_2^{10} (100x - 20x^2 + x^3)\,dx = 1\,568\pi \left[50x^2 - \frac{20x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_2^{10}$$

$$= 1\,568\pi\left(\tfrac{2048}{3}\right) \approx 3{,}4 \times 10^6 \text{ J}$$

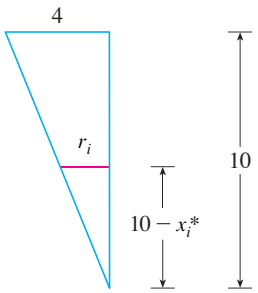
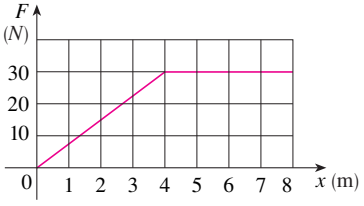


FIGURA 4

6.4 Exercícios

1. Um gorila de 360 lb escala uma árvore a uma altura de 20 pés. Encontre o trabalho realizado pelo gorila para alcançar esta altura em (a) 10 segundos (b) 5 segundos
2. Quanto trabalho é realizado quando um guindaste levanta uma pedra de 200 kg a uma altura de 3 m?
3. Uma partícula é movida ao longo do eixo x por uma força que mede $10/(1 + x)^2$ libras em um ponto a x e pés da origem. Calcule o trabalho realizado ao mover a partícula da origem até a distância de 9 pés.
4. Quando uma partícula está localizada a uma distância de x metros da origem, uma força de $\cos(\pi x/3)$ newtons atua sobre ela. Quanto trabalho é realizado ao mover a partícula de $x = 1$ até $x = 2$? Interprete a sua resposta considerando o trabalho realizado de $x = 1$ para $x = 1{,}5$ e de $x = 1{,}5$ para $x = 2$.
5. A figura a seguir mostra o gráfico de uma função força (em newtons) que cresce até seu máximo valor e depois permanece constante. Quanto trabalho é realizado pela força ao mover um objeto a uma distância de 8 m?



6. A tabela a seguir mostra valores de uma função de força $f(x)$, onde x é medido em metros e $f(x)$, em newtons. Use a Regra do Ponto Médio para estimar o trabalho realizado pela força ao mover um objeto de $x = 4$ até $x = 20$.

x	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$f(x)$	5	5,8	7,0	8,8	9,6	8,2	6,7	5,2	4,1

7. Uma força de 10 lb é necessária para manter uma mola esticada 4 pol além do seu comprimento natural. Quanto trabalho é realizado para esticá-la do seu comprimento natural até 6 pol além do seu tamanho natural?
8. Uma mola tem comprimento natural de 20 cm. Se uma força de 25 N é necessária para mantê-la esticada a um comprimento de 30 cm, qual o trabalho necessário para esticá-la de 20 cm a 25 cm?
9. Suponha que 2 J de trabalho sejam necessários para esticar uma mola de seu comprimento natural de 30 cm para 42 cm.
   (a) Quanto trabalho é necessário para esticar a mola de 35 cm para 40 cm?
   (b) Quão longe de seu comprimento natural uma força de 30 N manterá a mola esticada?
10. Se o trabalho necessário para esticar uma mola 1 pé além do seu comprimento natural é de 12 lb-pé, qual o trabalho necessário para esticá-la 9 pol além do seu comprimento natural?
11. Uma mola tem comprimento natural de 20 cm. Compare o trabalho W_1 realizado ao esticar a mola de 20 cm para 30 cm com o trabalho W_2 realizado para esticá-la de 30 cm para 40 cm. Como W_2 e W_1 estão relacionados?
12. Se 6 J de trabalho são necessários para esticar uma mola de 10 cm para 12 cm e um trabalho de 10 J é necessário para esticá-la de 12 cm para 14 cm, qual é o comprimento natural da mola?

13–20 Mostre como aproximar o trabalho pedido por uma soma de Riemann. Em seguida, expresse o trabalho como uma integral e calcule-a.

13. Uma corda pesada, com 50 pés de comprimento, pesa 0,5 lb-pé e está pendurada sobre a borda de um edifício com 120 pés de altura.
   (a) Qual o trabalho necessário para puxar a corda até o topo do edifício?
   (b) Qual o trabalho necessário para puxar metade da corda até o topo do edifício?
14. Uma corrente estendida no chão tem 10 m de comprimento e sua massa é 80 kg. Qual a quantidade de trabalho necessária para levantar uma extremidade da corrente a uma altura de 6 m?
15. Um cabo que pesa 2 lb/pés é utilizado para erguer 800 lb de carvão em uma mina com profundidade de 500 pés. Encontre o trabalho realizado.
16. Um balde que pesa 4 lb e uma corda de massa desprezível são usados para tirar água de um poço com 80 pés de profundidade. O balde é enchido com 40 lb de água e é puxado a uma velocidade de 2 pés/s, mas a água vaza por um buraco no balde a uma taxa

de 0,2 lb/s. Encontre o trabalho realizado para puxar o balde até o topo do poço.

17. Um balde de 10 kg, furado, é levantado do chão até uma altura de 12 m a uma velocidade constante, por uma corda que pesa 0,8 kg/m. Inicialmente o balde contém 36 kg de água, mas a água vaza a uma taxa constante e o balde acaba vazio exatamente quando atinge a altura de 12 m. Quanto trabalho foi realizado?

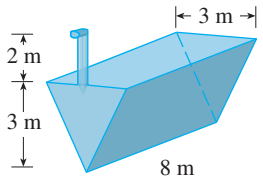
18. Uma corrente de 10 pés pesa 25 lb e está pendurada no teto. Encontre o trabalho necessário para levantar a extremidade inferior da corrente até o teto, de modo que ela se junte com a extremidade superior.

19. Um aquário de 2 m de comprimento, 1 m de largura e 1 m de profundidade está cheio de água. Encontre o trabalho necessário para bombear metade da água para fora do aquário. (Use o fato de que a densidade da água é 1 000 kg/m^3.)

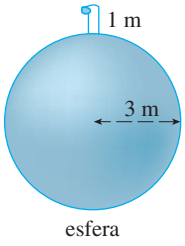
20. Uma piscina circular tem um diâmetro de 10 m, os lados têm 1,5 m de altura e a profundidade da água é de 1,2 m. Quanto trabalho é necessário para bombear toda a água pelo lado da piscina?

21–24 Um tanque está cheio de água. Encontre o trabalho necessário para bombear a água pela saída. Nos Exercícios 23 e 24 use a densidade da água igual a 62,5 lb/pé^3.

21.

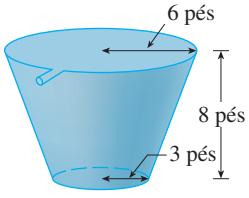


22.



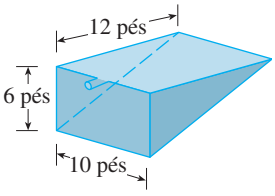
esfera

23.



tronco de um cone

24.



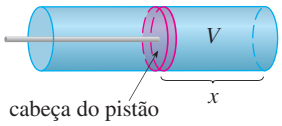
---

25. Suponha que para o tanque do Exercício 21, a bomba quebre depois de o trabalho de $4{,}7 \times 10^5$ J ter sido realizado. Qual é a profundidade da água remanescente no tanque?

26. Resolva o Exercício 22 se o tanque estiver cheio até a metade de óleo, que tem densidade de 900 kg/m^3.

27. Quando um gás se expande em um cilindro de raio r, a pressão em um dado momento é uma função do volume: $P = P(V)$. A força exercida pelo gás no pistão (veja a figura) é o produto da pressão pela área: $F = \pi r^2 P$. Mostre que o trabalho realizado pelo gás quando o volume se expande a partir de V_1 para V_2 é

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV$$



28. Em uma máquina a vapor a pressão P e o volume V de vapor satisfazem a equação $PV^{1,4} = k$, onde k é uma constante. (Isto é verdade para a expansão adiabática, isto é, a expansão na qual não há transferência de calor entre o cilindro e os seus arredores.) Use o Exercício 27 para calcular o trabalho realizado pelo motor, durante um ciclo em que o vapor começa a uma pressão de 160 lb/pol^2 e um volume de 100 pol^3 e expande-se para um volume de 800 pol^3.

29. (a) A Lei da Gravitação de Newton afirma que dois corpos com massas m_1 e m_2 atraem um ao outro com uma força

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Onde r é a distância entre os corpos e G é a constante gravitacional. Se um dos corpos está fixo, encontre o trabalho necessário para mover o outro a partir de $r = a$ até $r = b$.

(b) Calcule o trabalho necessário para lançar verticalmente um satélite de 1.000 kg a uma altura de 1.000 km. Você pode supor que a massa da Terra é $5{,}98 \times 10^{24}$ kg e está concentrada no seu centro. Use o raio da Terra igual a $6{,}37 \times 10^6$ m e G = $6{,}67 \times 10^{-11}$ N. m/kg^2.

30. A Grande Pirâmide do Faraó Quéops foi construída em calcário no Egito ao longo de um período de tempo de 20 anos de 2580 a.C. a 2560 a.C. Sua base é quadrangular com comprimento de lado de 756 pés; sua altura quando foi construída era de 481 pés. (Foi considerada a estrutura feita pelo homem mais alta do mundo por mais de 3.800 anos.) A densidade do calcário é de aproximadamente 150 lb/ pé^3.

(a) Calcule o trabalho total realizado na construção da pirâmide.

(b) Se cada operário trabalhou 10 horas por dia durante 20 anos, em 340 dias por ano, e fez 200 pés-lb/h de trabalho ao colocar blocos de calcário no lugar, quantos trabalhadores foram necessários em média para construir a pirâmide?

Korostyshevskiy/Shutterstock

6.5 Valor Médio de uma Função

É fácil calcular o valor médio de uma quantidade finita de números $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$y_{\text{med}} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

Mas como calcular a temperatura média durante o dia se infinitas leituras de temperatura forem possíveis? A Figura 1 mostra o gráfico de uma função de temperatura T(t), onde t é medido em horas e T em ºC, e é feita uma estimativa da temperatura média, T_{med}.

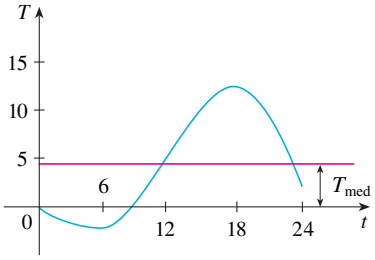


FIGURA 1

Em geral, vamos tentar calcular o valor médio da função $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Começamos por dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais, cada qual com comprimento $\Delta x = (b - a)/n$. Em seguida escolhemos pontos $x_1^*, \ldots, x_n^*$ em subintervalos sucessivos e calculamos a média dos números $f(x_1^*), \ldots, f(x_n^*)$:

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n}$$

(Por exemplo, se f representa a função de temperatura e $n = 24$, isso significa que temos leituras de temperatura a cada hora e então calculamos a sua média.) A partir de $\Delta x = (b - a)/n$, podemos escrever $n = (b - a)/\Delta x$ e a média dos valores se torna

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{\dfrac{b-a}{\Delta x}} = \frac{1}{b-a}\left[f(x_1^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x\right]$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Se n aumentar, podemos calcular o valor médio de um grande número de valores igualmente espaçados. (Por exemplo, poderíamos calcular a média de medições de temperatura tomadas a cada minuto ou até a cada segundo.) O valor limite é

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

pela definição de integral definida.

Portanto, definimos **o valor médio de f** no intervalo $[a, b]$ como

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Para uma função positiva, podemos pensar nesta definição em termos de

$$\frac{\text{área}}{\text{comprimento}} = \text{altura média}.$$

EXEMPLO 1 Encontre o valor médio da função $f(x) = 1 + x^2$ no intervalo $[-1, 2]$.

SOLUÇÃO Com $a = -1$ e $b = 2$, temos

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2}(1 + x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 2$$

Se $T(t)$ for a temperatura no instante t, poderíamos imaginar a existência de um instante específico no qual a temperatura seja a mesma da temperatura média. Para a função temperatura traçada na Figura 1, vemos que existem dois destes instantes – imediatamente antes do meio-dia e imediatamente antes da meia-noite. Em geral, existe um número c no qual o valor

da função f é exatamente igual ao valor médio da função, isto é, $f(c) = f_{\text{med}}$? O seguinte teorema diz que isto é verdade para funções contínuas.

O Teorema do Valor Médio para Integrais Se f for contínua em $[a, b]$, então existe um número c em $[a, b]$ tal que

$$f(c) = f_{\text{med}} = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx$$

ou seja,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a)$$

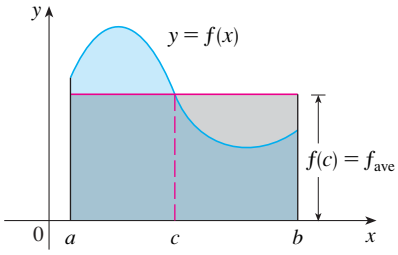


FIGURA 2

O Teorema do Valor Médio para as Integrais é uma consequência do Teorema do Valor Médio para as derivadas e do Teorema Fundamental do Cálculo. A demonstração é descrita no Exercício 25.

A interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio para Integrais é que, para funções *positivas* f, existe um número c tal que o retângulo com base $[a, b]$ e altura $f(c)$ tem a mesma área que a região sob o gráfico de f desde a até b. (Veja a Figura 2 e uma interpretação mais pitoresca na observação da margem.)

Você sempre pode cortar o topo de uma montanha (bidimensional) a uma certa altura e usá-lo para preencher os vales de tal maneira que a montanha se torne completamente plana.

EXEMPLO 2 Como $f(x) = 1 + x^2$ é contínua no intervalo $[-1, 2]$, o Teorema do Valor Médio para Integrais indica que existe um número c em $[-1, 2]$ tal que

$$\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\,dx = f(c)[2 - (-1)]$$

Neste caso em particular, podemos encontrar c explicitamente. Do Exemplo 1 sabemos que $f_{\text{med}} = 2$, então, o valor de c satisfaz

$$f(c) = f_{\text{med}} = 2$$

Portanto,

$$1 + c^2 = 2 \qquad \text{e assim} \qquad c^2 = 1$$

Dessa forma, nesse caso, existem dois números $c = \pm 1$ no intervalo $[-1, 2]$ que cumprem o Teorema do Valor Médio para Integrais.

Os Exemplos 1 e 2 estão ilustrados na Figura 3.

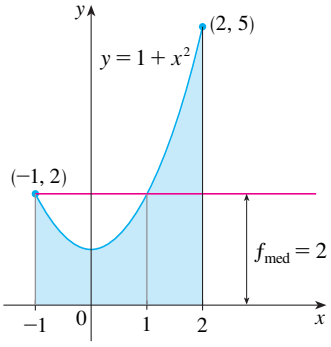


FIGURA 3

EXEMPLO 3 Mostre que a velocidade média de um carro em um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ é a mesma que a média de suas velocidades durante a viagem.

SOLUÇÃO Se $s(t)$ é o deslocamento do carro no intervalo de tempo t, então, por definição, a velocidade média do carro no intervalo é

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Por outro lado, o valor médio da função de velocidade no intervalo é

$$v_{\text{med}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} s'(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1}[s(t_2) - s(t_1)] \qquad \text{(pelo Teorema de Variação Total)}$$

$$= \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \text{velocidade média}$$

6.5 Exercícios

1–8 Encontre o valor médio da função no intervalo dado.

1. $f(x) = 4x - x^2, \quad [0, 4]$

2. $f(x) = \operatorname{sen} 4x, \quad [-\pi, \pi]$

3. $g(x) = \sqrt[3]{x}, \quad [1, 8]$

4. $g(x) = x^2\sqrt{1 + x^3}, \quad [0, 2]$

5. $f(t) = te^{-t^2}, \quad [0, 5]$

6. $f(\theta) = \sec^2(\theta/2), \quad [0, \pi/2]$

7. $h(x) = \cos^4 x \operatorname{sen} x, \quad [0, \pi]$

8. $h(u) = (3 - 2u)^{-1}, \quad [-1, 1]$

9–12

(a) Encontre o valor médio de f no intervalo dado.

(b) Encontre c tal que $f_{\text{med}} = f(c)$.

(c) Esboce o gráfico de f e um retângulo cuja área seja a mesma que a área sob o gráfico de f.

9. $f(x) = (x - 3)^2, \quad [2, 5]$

10. $f(x) = 1/x, \quad [1, 3]$

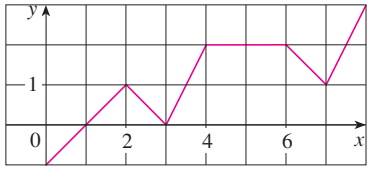
11. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x, \quad [0, \pi]$

12. $f(x) = 2x/(1 + x^2)^2, \quad [0, 2]$

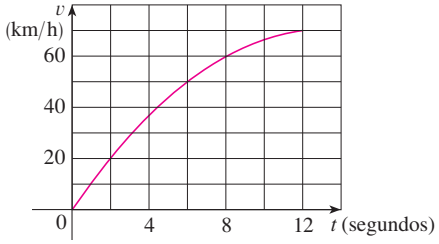
13. Se f é contínua e $\int_1^3 f(x)\,dx = 8$, mostre que f assume o valor 4 pelo menos uma vez no intervalo [1,3].

14. Encontre os valores b tais que o valor médio de $f(x) = 2 + 6x - 3x^2$ no intervalo $[0, b]$ é igual a 3.

15. Encontre o valor médio de f em [0,8].



16. O gráfico da velocidade de um carro acelerado está mostrado a seguir.



(a) Utilize a Regra do Ponto Médio para estimar a velocidade média do veículo durante os primeiros 12 segundos.

(b) Em que instante a velocidade instantânea foi igual à velocidade média?

17. Em uma certa cidade a temperatura (em °C) t horas depois das 9 h foi aproximada pela função

$$T(t) = 20 + 6 \operatorname{sen} \frac{\pi t}{12}$$

Calcule a temperatura média durante o período entre 9 h e 21 h.

18. A velocidade v do sangue que circula em uma veia com raio R e comprimento l a uma distância r do eixo central é

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

onde P é a diferença de pressão entre as extremidades da veia e η é a viscosidade do sangue (veja o Exemplo 7 da Seção 3.7). Encontre a velocidade média (em relação a r) ao longo do intervalo de $0 \leq r \leq R$. Compare a velocidade média com a velocidade máxima.

19. A densidade linear de uma barra de 8 m de comprimento é $12/\sqrt{x + 1}$ kg/m, onde x é medido em metros a partir da ponta da barra. Encontre a densidade média da barra.

20. (a) Uma xícara de café tem temperatura de 95 °C e leva 30 minutos para esfriar até 61 °C em uma sala com temperatura de 20 °C. Use a Lei de Newton do Resfriamento (Seção 3.8) para mostrar que a temperatura do café depois de t minutos é

$$T(t) = 20 + 75e^{-kt}$$

onde $k \approx 0{,}02$.

(b) Qual a temperatura média do café durante a primeira meia hora?

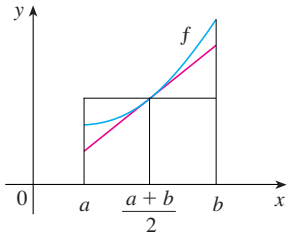
21. No Exemplo 1 na Seção 3.8, modelamos a população mundial na segunda metade do século 20 pela equação $P(t) = 2\,560e^{0{,}017185t}$. Use essa equação para estimar a população mundial média durante esse período de tempo.

22. Se um corpo em queda livre parte do repouso, então o seu deslocamento é dado por $s = \frac{1}{2}gt^2$. Considere que a velocidade depois de um tempo T seja v_T. Mostre que, se calcularmos a média das velocidades em relação a t, obteremos $v_{\text{med}} = \frac{1}{2}v_T$, mas se calcularmos a média das velocidades em relação a s, teremos $v_{\text{med}} = \frac{2}{3}v_T$.

23. Use o resultado do Exercício 83 na Seção 5.5 para calcular o volume médio de ar inalado pelos pulmões em um ciclo respiratório.

24. Use o diagrama para mostrar que se f é côncava para cima em $[a, b]$, então

$$f_{\text{med}} > f\left(\frac{a - b}{2}\right)$$



25. Prove o Teorema do Valor Médio para Integrais aplicando o Teorema do Valor Médio para derivadas (consulte a Seção 4.2) para obter mais informações sobre a função $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

26. Se $f_{\text{med}}[a, b]$ denota o valor médio de f no intervalo $[a, b]$ e $a < c < b$, mostre que

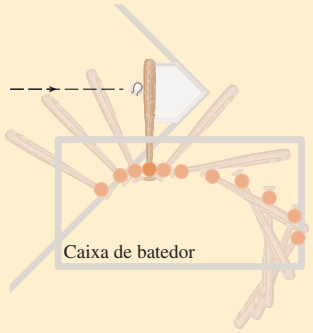
$$f_{\text{med}}[a, b] = \frac{c - a}{b - a} f_{\text{med}}[a, c] + \frac{b - c}{b - a} f_{\text{med}}[c, b]$$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

PROJETO APLICADO

CÁLCULOS E BEISEBOL



Uma visão superior da posição, apresentada a cada quinquagésimo de segundo durante um balanço típico de um taco de beisebol (adaptado de *The Physics of Baseball*).

Neste projeto vamos explorar três das muitas aplicações do cálculo para beisebol. As interações físicas do jogo, especialmente a colisão da bola e o taco, são bastante complexas e seus modelos são discutidos em detalhes em um livro de Robert Adair, *The Physis of Baseball,* 3ª edição (Nova York, 2002).

1. Você pode se surpreender ao saber que a colisão da bola com um taco de beisebol dura apenas cerca de um milésimo de segundo. Aqui calculamos a força média no taco durante esta colisão computando primeiramente a mudança no momento da bola.

O momento p de um objeto é o produto de sua massa m e sua velocidade v, ou seja, $p = mv$. Suponha que um objeto, movendo-se ao longo de uma reta, seja acionado por uma força $F = F(t)$, que é uma função contínua do tempo.

(a) Mostre que a variação do momento ao longo de um intervalo de tempo $[t_0, t_1]$ é igual à integral de F de t_0 a t_1; isto é, mostre que

$$p(t_1) - p(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt$$

Essa integral é chamada *impulso* da força ao longo do intervalo de tempo.

(b) Um arremessador joga uma bola com uma velocidade média de 90 mi/h para o batedor, que a rebate na mesma linha diretamente ao arremessador. A bola fica em contato com o taco por 0,001 s e o deixa com velocidade de 110 mi/h. A bola de beisebol pesa 5 oz e, no Sistema Métrico Americano, sua massa é medida em slugs (pés/segundo): $m = w/g$, onde $g = 32$ pés/s^2.

(i) Encontre a variação de momento da bola.

(ii) Encontre a força média no taco.

2. Neste problema, calculamos o trabalho necessário para um arremessador jogar uma bola a uma velocidade de 90 mi /h considerando primeiramente a energia cinética.

A *energia cinética* K de um objeto com massa m e velocidade v é dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$. Suponha que um objeto m, movendo-se em linha reta, seja acionado por uma força $F = F(s)$ que depende da sua posição s. De acordo com a Segunda Lei de Newton

$$F(s) = ma = m\frac{dv}{dt}$$

onde a e v denotam a velocidade e a aceleração do objeto.

(a) Mostre que o trabalho realizado para mover o objeto a partir de uma posição s_0 para a posição s_1 é igual à variação da energia cinética do objeto, isto é, mostre que

$$W = \int_{s_0}^{s_1} F(s)\,ds = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

onde $v_0 = v(s_0)$ e $v_1 = v(s_1)$ são as velocidades do objeto nas posições s_0 e s_1. *Dica:* pela Regra da Cadeia,

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds}$$

(b) Quantas libras-pés de trabalho é preciso para atirar uma bola a uma velocidade de 90 mi/h?

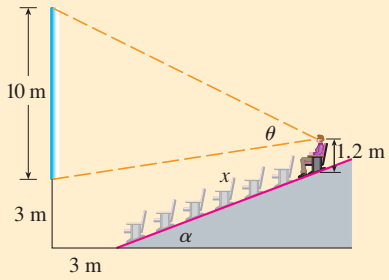
3. (a) Um defensor externo distante 280 pés da base final arremessa a bola diretamente para o receptor, com uma velocidade de 100 pés/s. Assuma que a velocidade $v(t)$ da bola depois de t segundos satisfaça a equação diferencial $dv/dt = -\frac{1}{10}v$ por causa da resistência do ar. Quanto tempo leva para a bola chegar à base final? (Ignore qualquer movimento vertical da bola.)

(b) O técnico da equipe se pergunta se a bola chegará à base final mais cedo se for novamente arremessada por um defensor interno. O interbases se posiciona diretamente entre o defensor externo e a base final, pega a bola lançada pelo defensor externo, gira e arremessa a bola para o receptor, com uma velocidade inicial de 105 pés/s. O técnico cronometra o tempo do novo arremesso do interbases (capturando, girando, jogando) em meio segundo. Quão distante da base final deve o interbases posicionar-se para minimizar o tempo total que a bola leva para chegar na base? Deveria o técnico incentivar um lançamento direto ou um novo arremesso? E se o interbases puder arremessar a 115 pés/s?

(c) Para qual velocidade de arremesso do interbases um lançamento retransmitido terá a mesma duração de um lançamento direto?

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

PROJETO APLICADO — SCA ONDE SENTAR-SE NO CINEMA



Uma sala de cinema tem uma tela que está posicionada a 3 m acima do chão e tem 10 m de altura. A primeira fila de assentos é colocada a 3 m da tela e as fileiras são posicionadas com 1 m de distância umas das outras. O chão da área dos assentos é inclinado a um ângulo de $\alpha = 20°$ acima da horizontal e a distância ao longo da linha inclinada até o seu assento, que é x. A sala tem 21 fileiras de assentos, então $0 \leqslant x \leqslant 20$. Suponha que você decida que o melhor lugar para se sentar é a fileira onde o ângulo θ subentendido pela tela em seus olhos é um ângulo máximo. Suponhamos que os seus olhos estejam a 1,2 m acima do solo, conforme mostrado na figura. (No Exercício 74 da Seção 4.7, vimos uma versão mais simples deste problema, onde o solo é horizontal, mas este projeto envolve uma situação mais complicada e requer tecnologia.)

1. Mostre que

$$\theta = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - 100}{2ab}\right)$$

onde $$a^2 = (3 + x\cos\alpha)^2 + (11{,}8 - x\operatorname{sen}\alpha)^2$$

e $$b^2 = (3 + x\cos\alpha)^2 + (x\operatorname{sen}\alpha - 1{,}8)^2$$

2. Use o gráfico de θ como uma função de x para estimar o valor de x que maximiza θ. Em qual fileira você deveria se sentar? Qual é o ângulo de visão θ nessa fileira?
3. Use seu sistema de computação algébrica para derivar θ e encontrar um valor numérico para a raiz da equação $d\theta/dx = 0$. Esse resultado confirma a sua resposta no Problema 2?
4. Use o gráfico de θ para estimar o valor médio de θ no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 20$. Então, use o seu SCA para calcular o valor médio. Compare com os valores máximo e mínimo de θ.

6 Revisão

Verificação de Conceitos

1. (a) Desenhe duas curvas típicas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Mostre como aproximar a área entre essas curvas através de uma soma de Riemann e esboce os retângulos aproximantes correspondentes. Então, escreva uma expressão para a área exata.
   (b) Explique como a situação muda se as curvas tiverem equações $x = f(y)$ e $x = g(y)$, onde $f(y) \geqslant g(y)$ para $c \leqslant y \leqslant d$.
2. Suponha que Sue corra mais rápido que Kathy durante todo o percurso de 1.500 metros. Qual é o significado físico da área entre suas curvas de velocidade para o primeiro minuto de corrida?
3. (a) Suponha que S seja um sólido com secções transversais conhecidas. Explique como aproximar o volume de S por uma soma de Riemann. Então, escreva uma expressão para o volume exato.
   (b) Se S é um sólido de revolução, como você encontra as áreas das secções transversais?
4. (a) Qual é o volume de uma casca cilíndrica?
   (b) Explique como usar cascas cilíndricas para encontrar o volume de um sólido de revolução.
   (c) Por que você usaria o método das cascas em vez do de fatiamento?
5. Suponha que você empurre um livro sobre uma mesa de 6 m de comprimento exercendo uma força $f(x)$ sobre cada ponto de $x = 0$ até $x = 6$. O que $\int_0^6 f(x)\,dx$ representa? Se $f(x)$ é medida em newtons, quais são as unidades da integral?
6. (a) Qual é o valor médio da função f no intervalo $[a, b]$?
   (b) O que diz o Teorema do Valor Médio para Integrais? Qual é a sua interpretação geométrica?

Exercícios

1–6 Encontre a área da região delimitada pelas curvas dadas.

1. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$
2. $y = 1/x, \quad y = x^2, \quad y = 0, \quad x = e$
3. $y = 1 - 2x^2, \quad y = |x|$
4. $x + y = 0, \quad x = y^2 + 3y$
5. $y = \operatorname{sen}(\pi x/2), \quad y = x^2 - 2x$
6. $y = \sqrt{x}, \quad y = x^2, \quad x = 2$

7–11 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno do eixo especificado.

7. $y = 2x, \ y = x^2$; em torno do eixo x
8. $x = 1 + y^2, \ y = x - 3$; em torno do eixo y

9. $x = 0,\ x = 9 - y^2$; em torno de $x = -1$

10. $y = x^2 + 1,\ y = 9 - x^2$; em torno de $y = -1$

11. $x^2 - y^2 = a^2,\ x = a + h$ (onde $a > 0, h > 0$); em torno do eixo y

---

12–14 Escreva, mas não avalie, uma integral para o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno do eixo especificado.

12. $y = \operatorname{tg} x,\ y = x,\ x = \pi/3$; em torno do eixo y

13. $y = \cos^2 x,\ |x| \leq \pi/2,\ y = \frac{1}{4}$; em torno de $x = \pi/2$

14. $y = \sqrt{x},\ y = x^2$; em torno de $y = 2$

---

15. Encontre os volumes dos sólidos obtidos pela rotação da região delimitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ em torno das seguintes retas:
(a) O eixo x
(b) O eixo y
(c) $y = 2$

16. Considere que $\mathcal{R}$ seja a região do primeiro quadrante delimitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = 2x - x^2$. Calcule as seguintes quantidades:
(a) A área de $\mathcal{R}$
(b) O volume obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno do eixo x.
(c) O volume obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno do eixo y.

17. Considere que $\mathcal{R}$ seja a região delimitada pelas curvas $\operatorname{tg}(x^2)$, $x = 1$ e $y = 0$. Use a Regra do Ponto Médio com $n = 4$ para estimar as quantidades a seguir.
(a) A área de $\mathcal{R}$.
(b) O volume obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno do eixo x.

18. Considere que $\mathcal{R}$ seja a região delimitada pelas curvas $y = 1 - x^2$ e $y = x^6 - x + 1$. Estime as seguintes quantidades:
(a) As coordenadas de x para os pontos de intersecção das curvas.
(b) A área de $\mathcal{R}$.
(c) O volume gerado quando $\mathcal{R}$ é girado em torno do eixo x.
(d) O volume gerado quando $\mathcal{R}$ é girado em torno do eixo y.

19–22 Cada integral representa o volume de um sólido. Descreva o sólido.

19. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\pi x \cos x\, dx$

20. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\pi \cos^2 x\, dx$

21. $\displaystyle\int_0^{\pi} \pi (2 - \operatorname{sen} x)^2\, dx$

22. $\displaystyle\int_0^{4} 2\pi (6 - y)(4y - y^2)\, dy$

---

23. A base de um sólido é um disco circular de raio 3. Ache o volume do sólido se secções transversais paralelas perpendiculares à base são triângulos retos isósceles com a hipotenusa na base.

24. A base de um sólido é a região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$. Encontre o volume do sólido se as secções transversais perpendiculares ao eixo x forem quadrados com um lado sobre a base.

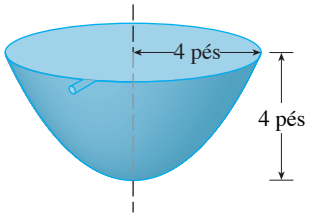
25. A altura de um monumento é de 20 m. Uma secção transversal horizontal a uma distância de x metros do topo é um triângulo equilátero com lado medindo $\frac{1}{4}x$ metros. Encontre o volume do monumento.

26. (a) A base de um sólido é um quadrado com vértices localizadas em (1,0), (0,1), (−1, 0) e (0, −1). Cada secção transversal perpendicular ao eixo x é um semicírculo. Ache o volume do sólido.
(b) Mostre que cortando o sólido da parte (a) podemos rearranjá-lo para formar um cone. Assim, calcule seu volume mais simplesmente.

27. Uma força de 30 N é necessária para manter uma mola esticada do seu comprimento natural de 12 cm a um comprimento de 15 cm. Quanto trabalho é realizado ao esticar a mola de 12 cm para 20 cm?

28. Um elevador pesando 1 600 lb é suspenso a uma altura de 200 pés por um cabo que pesa 10 lb/pé. Quanto trabalho é necessário para suspender o elevador do porão para o terceiro andar a uma distância de 30 pés?

29. Um tanque cheio de água tem o formato de um paraboloide de revolução, como mostrado na figura; isto é, seu formato é obtido pela rotação de uma parábola ao redor de um eixo vertical.
(a) Se a sua altura é de 4 pés e o raio do topo, de 4 pés, ache o trabalho necessário para bombear a água para fora do tanque.
(b) Qual a profundidade da água remanescente no tanque depois de um trabalho de 4 000 lb-pés?



30. Encontre o valor médio da função $f(t) = t \operatorname{sen}(t^2)$ no intervalo $[0, 10]$.

31. Se f é uma função contínua, qual é o limite quando $h \to 0$ do valor médio de f no intervalo $[x, x + h]$?

32. Considere que $\mathcal{R}_1$ seja a região delimitada por $y = x^2$, $y = 0$ e $x = b$, onde $b > 0$. Considere que $\mathcal{R}_2$ seja a região delimitada por $y = x^2$, $x = 0$ e $y = b^2$.
(a) Existe algum valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ tenham a mesma área?
(b) Existe algum valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ ocupe o mesmo volume quando girado em torno do eixo x e do eixo y?
(c) Existe algum valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ ocupem o mesmo volume quando girados em torno do eixo x?
(d) Existe algum valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ ocupem o mesmo volume quando girados em torno do eixo y?

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

Problemas Quentes

1. (a) Encontre uma função contínua positiva f tal que a área sob seu gráfico de 0 a t seja $A(t) = t^3$ para todo $t > 0$.

(b) Um sólido é gerado pela rotação em torno do eixo x da região abaixo da curva $y = f(x)$, onde f é uma função positiva e $x \geqslant 0$. O volume gerado pela parte da curva de $x = 0$ a $x = b$ é b^2 para todo $b > 0$. Encontre a função f.

2. Existe uma reta que passa pela origem e que divide a região limitada pela parábola $y = x - x^2$ e o eixo x em duas regiões de áreas iguais. Qual é a inclinação dessa reta?

3. A figura mostra uma reta horizontal $y = c$ interceptando a curva $y = 8x - 27x^3$. Encontre o número c tal que as áreas das regiões sombreadas sejam iguais.

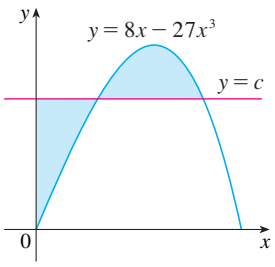


FIGURA PARA O PROBLEMA 3

4. Um vidro cilíndrico de raio r e altura L é enchido com água e então inclinado até que a água remanescente no vidro cubra exatamente a sua base.

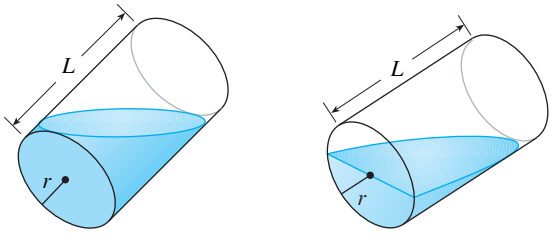
(a) Determine uma maneira de "fatiar" a água em secções transversais paralelas retangulares e, então, *escreva* uma integral definida para o volume de água no vidro.

(b) Determine uma maneira de "fatiar" a água em secções transversais paralelas que são trapézios e, então, *escreva* uma integral definida para o volume de água.

(c) Encontre o volume de água no vidro calculando uma das integrais no item (a) ou no item (b).

(d) Encontre o volume de água no vidro a partir de considerações puramente geométricas.

(e) Suponha que o vidro fosse inclinado até que a água cobrisse exatamente a metade da base. Em que direção você poderia "fatiar" a água em secções transversais triangulares? E em secções transversais retangulares? E em secções transversais, que são segmentos de círculo? Encontre o volume de água no vidro.



5. (a) Mostre que o volume de um segmento de altura h de uma esfera de raio r é

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$$

(veja a figura).

(b) Mostre que se uma esfera de raio 1 é fatiada por um plano a uma distância x do centro de maneira que o volume de uma calota é o dobro do volume da outra, então x é uma solução da equação

$$3x^3 - 9x + 2 = 0$$

onde $0 < x < 1$. Use o Método de Newton para encontrar o valor de x com precisão de quatro casas decimais.

(c) Usando a fórmula para o volume de uma calota de uma esfera, pode-se mostrar que a profundidade x em que uma esfera flutuante de raio r afunda na água é uma raiz da equação

$$x^3 - 3rx^2 + 4r^3s = 0$$

onde s é o peso específico da esfera. Suponha que uma esfera de madeira de 0,5 m de raio tenha peso específico de 0,75. Calcule, com precisão de quatro casas decimais, a profundidade em que a esfera irá afundar.

(d) Uma bacia hemisférica tem raio de 12 cm e a água está enchendo-a a uma taxa de 3 cm³/s.

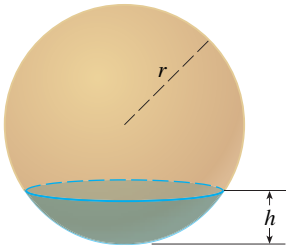


FIGURA PARA O PROBLEMA 5

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

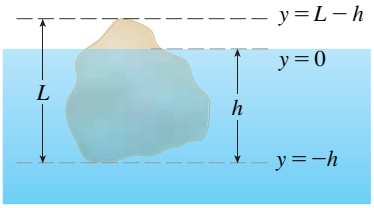


FIGURA PARA O PROBLEMA 6

(i) Quão rápido o nível de água na bacia está subindo no instante em que a água está à profundidade de 7 cm?

(ii) Em um certo instante, a água está com uma profundidade de 8 cm. Quanto tempo levará para água encher a bacia?

6. O Princípio de Arquimedes afirma que a força de empuxo em um objeto parcial ou totalmente submerso em um fluido é igual ao peso do fluido que o objeto desloca. Portanto, para um objeto de densidade ρ_0 flutuando parcialmente submerso em um fluido de densidade ρ_f, a força de empuxo é dada por $F = \rho_f g \int_{-h}^{0} A(y)\,dy$, onde g é a aceleração da gravidade e $A(y)$ é a área de uma secção transversal típica do objeto (veja a figura). O peso do objeto é dado por

$$W = \rho_0 g \int_{-h}^{L-h} A(y)\,dy$$

(a) Mostre que a porcentagem do volume do objeto acima da superfície do líquido é

$$100\,\frac{\rho_f - \rho_0}{\rho_f}$$

(b) A densidade do gelo é de 917 kg/m^3, e a densidade da água do mar é de 1.030 kg/m^3. Que porcentagem do volume de um *iceberg* está acima da água?

(c) Um cubo de gelo flutua em um copo completamente cheio com água. A água transbordará quando o gelo derreter?

(d) Uma esfera de raio 0,4 m e peso desprezível está flutuando em um grande lago de água doce. Qual o trabalho necessário para submergir a esfera completamente? A densidade da água é 1 000 kg/m^3.

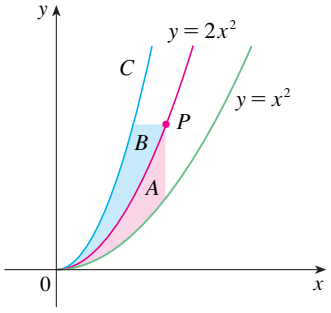


FIGURA PARA O PROBLEMA 9

7. A água em uma tigela aberta evapora a uma taxa proporcional à área da superfície da água. (Isso significa que a taxa de decréscimo do volume é proporcional à área da superfície.) Mostre que a profundidade da água diminui a uma taxa constante, independentemente da forma da tigela.

8. Uma esfera de raio 1 intercepta uma esfera menor de raio r de maneira que a intersecção é um círculo de raio r. (Em outras palavras, elas se interceptam em um círculo máximo da esfera pequena.) Encontre r de forma que o volume dentro da esfera pequena e fora da esfera grande seja o máximo possível.

9. A figura mostra uma curva C com a seguinte propriedade: para cada ponto P na curva do meio $y = 2x^2$, as áreas A e B são iguais. Encontre a equação para C.

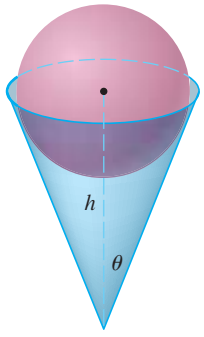


FIGURA PARA O PROBLEMA 10

10. Um copo descartável cheio de água tem o formato de um cone com altura h e ângulo semivertical θ. (Veja a figura.) Uma bola é colocada cuidadosamente no copo, deslocando uma parte da água, o que resulta em um transbordamento. Qual é o raio da bola que faz com que o maior volume de água seja transbordado?

11. Uma *clepsidra*, ou relógio de água, é um frasco com um pequeno furo no fundo pelo qual a água pode passar. O relógio é calibrado para medir o tempo colocando-se marcas no frasco que correspondem ao nível de água a intervalos de tempo iguais. Seja $x = f(y)$ uma função contínua no intervalo $[0, b]$ e suponha que o frasco seja formado pela rotação do gráfico de f ao redor do eixo y. Sejam V o volume de água e h a altura do nível da água no instante t.

(a) Determine V como uma função de h.

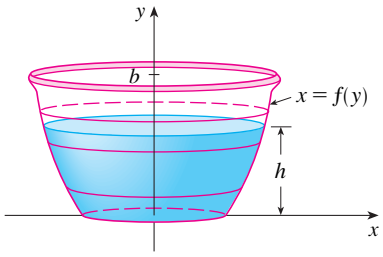
(b) Mostre que

$$\frac{dV}{dt} = \pi[f(h)]^2\,\frac{dh}{dt}$$

(c) Suponha que A é a área do buraco no fundo do frasco. Da Lei de Torricelli, temos que a taxa de variação do volume de água é dada por

$$\frac{dV}{dt} = kA\sqrt{h}$$

onde k é uma constante negativa. Determine uma fórmula para a função f tal que dh/dt seja uma constante C. Qual a vantagem em ter $dh/dt = C$?



12. Um frasco cilíndrico de raio r e altura L está parcialmente cheio com um líquido, cujo volume é V. Se um frasco é girado em torno do seu eixo de simetria com uma velocidade angular constante ω, então, o frasco induzirá um movimento de rotação no líquido em torno desse mesmo eixo. Eventualmente, o líquido girará na mesma velocidade angular do frasco. A superfície do líquido se tornará convexa, como indicado na figura, porque a força centrífuga nas partículas do líquido aumenta com a distância do eixo do frasco. Pode-se mostrar que a superfície do líquido é um paraboloide de revolução gerado pela rotação da parábola

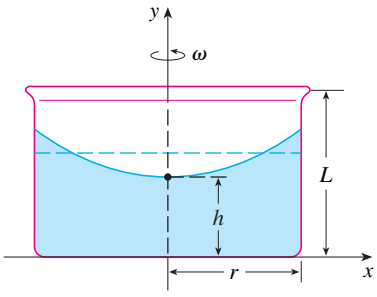


FIGURA PARA O PROBLEMA 12

$$y = h + \frac{\omega^2 x^2}{2g}$$

em torno do eixo y, onde g é a aceleração da gravidade.

(a) Determine h como uma função de ω.

(b) A que velocidade angular a superfície do líquido tocará o fundo do frasco? A que velocidade o líquido entornará?

(c) Suponha que o raio do frasco seja 2 m, a altura, 7 m e o frasco e o líquido estejam girando com a mesma velocidade angular. A superfície do líquido está 5 m abaixo do topo do frasco no eixo central e 4 m abaixo do topo do frasco, a 1 m de distância do eixo central.
(i) Determine a velocidade angular do frasco e o volume do fluido.
(ii) A que distância da borda do tanque está o líquido na parede do frasco?

13. Suponha que o gráfico de um polinômio cúbico intercepte a parábola $y = x^2$ quando $x = 0$, $x = a$ e $x = b$, onde $0 < a < b$. Se as duas regiões entre as curvas tiverem a mesma área, como b está relacionado com a?

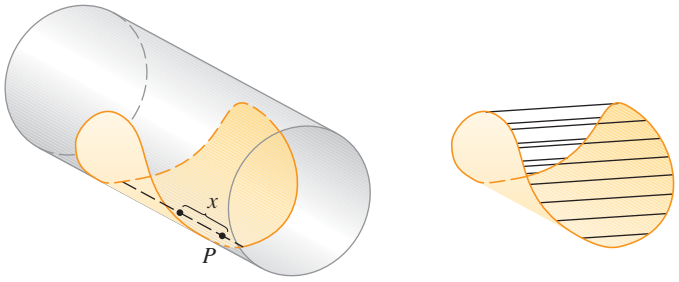
SCA **14.** Suponha que estejamos planejando fazer tacos com uma tortilha redonda com 8 polegadas de diâmetro, curvando a tortilha como se estivesse parcialmente envolvendo um cilindro circular. Queremos rechear a tortilha até a borda (e não mais) com carne, queijo e outros ingredientes. Nosso problema é decidir como curvar a tortilha a fim de maximizar o volume de comida que ela possa conter.

(a) Começamos posicionando um cilindro circular de raio r ao longo de um diâmetro da tortilha e envolvendo-a em torno do cilindro. Seja x a distância do centro da tortilha até um ponto P sobre o diâmetro (veja a figura). Mostre que a área da secção transversal do taco recheado no plano passando por P e perpendicular ao eixo do cilindro é

$$A(x) = r\sqrt{16 - x^2} - \tfrac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{r}\sqrt{16 - x^2}\right)$$

e escreva uma expressão para o volume desse taco recheado.

(b) Determine (aproximadamente) o valor de r que maximiza o volume do taco. (Use uma aproximação gráfica do seu SCA.)



15. Se a tangente no ponto P e na curva $y = x^3$ intercepta essa mesma curva em Q, seja A a área da região delimitada pela curva e pelo segmento de reta PQ. Seja B a área da região definida da mesma forma, mas começando com Q em vez de P. Qual a relação entre A e B?